MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

KILENCZEDIK KÖTET.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1900

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

KILENCZEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Második füzet.

Harmadik füzet.

Negyedik füzet.

Ötödik füzet.

*

Hatodik füzet.

Hetedik füzet.

Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Irodalom.

Megoldott feladatok.

Társulati ügyek.

AZ ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉNEK UJABB FEJLŐDÉSÉRŐL.*

(HURWITZ A. előadása a zürichi math. kongresszuson.)

Az ** analitikai függvények általános elmélete, melynek újabb fejlődéséről értekezni akarok, kétféle szempontból érdemli meg nagyobb érdeklődésünket.

Egyrészt a speciális függvények vizsgálatára szolgáltat általános szempontokat és segédeszközöket. E tekintetben csak az algebrai függvények és azok integráljainak elméletére, továbbá KLEIN, POINCARÉ és másoknak a lineár transzformacziókkal önmagukba transzformálható függvényekre vonatkozó újabb vizsgálataira, valamint az algebrai differencziálegyenletekkel értelmezett transcendensek kiterjedt elméletére hivatkozom.

---

* Az előadás lényegesen változatlan alakban jelenik meg. Csak itt-ott javítottam az előadás eredeti szövegén, főként a kongresszuson részt vett szaktársakkal való megbeszélések alapján. Ha mindennek daczára, még mindig mutatkoznak hiányok egyes részletekben, különösen a miatt, hogy egyes fontos dolgozatok kikerülték figyelmemet, a mit igen valószínűnek, sőt majdnem bizonyosnak tartok, az idevonatkozó irodalom rendkívül nagy terjedelmére való tekintettel, bizonynyal némi elnézésre számíthatok. Az anyag behatárolása tekintetében, a mi a dolog természete szerint bizonyos fokig tetszőleges volt, az volt az óhajtásom, hogy leginkább azokat a pontokat beszéljem meg, a melyek az általános számtan (Grössenlehre) alapelveivel közeli vonatkozásban vannak. Egyébként az anyag lehető megszorítására már az a körülmény is kényszerített, hogy az előadásra csak szükre szabott idő állott rendelkezésre. A szöveghez kimerítő irodalmi jegyzéket, valamint nehány jegyzetet fűztem, a melyek az előadásban érintett pontokat tovább fejtik és megvilágítják.

** HURWITZ A. a zürichi műegyetem tudós tanára lekötelező készséggel engedte meg e felette érdekes és tanulságos előadásának magyar nyelven val közlését; fogadja ezért e helyen is hálás köszönetünk kifejezését. *Szerk*

Másrészt az analitikai függvények általános elméletének önálló, ismerettani fontossága van. Elvezet minden mathematikai vizsgálat elvi alapjaihoz és megerősíti itt azokat az alapokat, melyeken az egész analizis nyugszik.

Tárgyalásaimban különösen az általános függvénytannak ezt az oldalát fogom kidomborítani. Azt hiszem ugyanis, hogy ezek az elvi fontosságú kérdések a függvénytannal foglalkozók szűk körén túl terjedő érdeklődést is kelthetnek.

Az analitikai függvények elméletén tulajdonképpen kétféle elméletet értünk: a Cauchy-Riemann-félét és a Weierstrass-félét.

Lényeges eltérésük abban van, hogy a függvényfogalom különböző értelmezéséből indulnak ki. Minthogy a Weierstrass-féle értelmezés elemibb jellegű, ezzel kezdem elmélkedésemet.

Lagrange az ő «Théorie des fonctions analytiques»-jében azt a hamis tételt akarta bebizonyítani, hogy minden folytonos függvény hatványsorba fejthető. Weierstrass megfordítva azt mondja: «analitikainak» nevezem azt a függvényt, a mely hatványsorba fejthető. Ez a megállapitás természetesen még pontosabb kifejezésre szorul. Teljesen szigorúan nem annyira az értekezéseiben, mint inkább egyetemi előadásaiban fejtette ki Weirstrass az ő függvényfogalmát és pedig a következő módon:

A komplex z változó értékeit a szokásos módon mint egy sík pontjait állítjuk elő. A $z—a$ pozitiv egész hatványai szerint haladó sor egy bizonyos körön belül összetartó, melynek középpontja a. Mellesleg megjegyezzük, hogy e kör sugara a hatványsor együtthatóitól egyszerü módon függ, a mint azt már Cauchy [1] kifejtette, mely összefüggés Hadamard [2] révén, a ki azt Cauchy-tól függetlenül újra fölfedezte, szélesebb körökben ismeretessé vált.

Weierstrass most két hatványsort vizsgál, melyeknek összetartási köreik excentrikusak, de közös területrészök van. Ha e közös rész minden pontjában a két hatványsornak ugyanaz az értéke, akkor egyik hatványsor a másikának *közvetetlen folytatása.* Általában valamely hatványsor *folytatása* egy másiknak, ha az egyik kezdő-, a másik pedig végső tagja a hatványsorok egy véges sorozatának, a melyek közül mindegyik az előzőnek közvetetlen folytatása.

Ha egy megadott hatványsorból indulunk ki és azt összes folytatásával egy rendszerbe foglaljuk össze, akkor megkapjuk azt, a mit WEIERSTRASS a hatványsorok *monogen rendszerének* nevezett. Ilyen rendszer a complex z változónak meghatározott függvényét létesíti, azaz z változó értékeihez meghatározott $f(z)$ komplex számértékeket rendel. Tekintsük ugyanis a z-nek egy meghatározott értékét; akkor a rendszer mindama hatványsorának, a melynek összetartási köre a z pontot magában foglalja, meghatározott $f(z)$ összege van. Ha a rendszer e különböző hatványsorainak megfelelő $f(z)$ értékek mindannyian megegyeznek, akkor az $f(z)$ függvény az illető z értékre nézve *egyértékű,* ellenkező esetben *többértékű.*

WEIERSTRASS szerint a függvény *analitikai,* ha az itt vázolt módon *a hatványsoroknak egy monogen rendszerével értelmezhető.*

Miként látjuk, a hatványsorok monogén rendszerének a fogalma a primär fogalom; ezen épűl fel a függvény fogalma. Megjegyzem különben, hogy MÉRAY franczia mathematikus [3] WEIERSTRASStól függetlenül, az analitikai függvénynek ezzel lényegében megegyező fogalmát állapította meg.

Az analitikai függvény ez értelmezéséhez a fontos kérdéseknek egész sora fűződik. Egyelőre csak egyértékű függvényekre tekintek. Ha van egy monogén rendszerrel értelmezett analitikai függvényünk, akkor a komplex számsik pontjai két csoportba sorozhatók. Az elsőbe azok tartoznak, a melyek a rendszer valamelyik hatványsorának összetartási körébe tartoznak, a másikba pedig a többi pontok. Az első osztályba sorozott pontok összessége alkotja WEIERSTRASS szerint a függvény *folytonossági tartományát.* [4] Itt felmerül ez a kérdés:

Az egyértékű analitikai függvény folytonossági tartományára nézve minő lehetőségek vannak?

Hogy erre a kérdésre pontosabban felelhessünk, a pontsokaságok tanából kell nehány dologra figyelmeztetnem. Képzeljünk egy pontsokaságot a számsíkon vagy a gömbön, a mely a síkra stereographikusan van vonatkoztatva. A síknak egy tetszésszerinti pontja e sokasággal szemben háromféleképpen viselkedhetik. Vagy alkothatunk a pont körül oly kört, melynek belsejében levő pontok mindannyian a pontsokasághoz tartoznak. Ekkor az illető pont a sokaság belső pontja. Vagy pedig alkotható az illető pont körül olyan kör, melynek belsejében egyetlen egy pontja sincs a tartománynak. Ekkor az illető pont a sokaság külső pontja. Végre lehetséges, hogy a felvett pont körül alkotható minden kör belsejében legalább egy olyan pont van, mely a sokasághoz tartozik, valamint legalább egy olyan, mely nem tartozik a sokasághoz. Ekkor azt mondjuk, hogy az illető pont a sokaság határán van.

Az egyértékű analitikai függvény folytonossági tartománya, miként könnyen belátható, mindenesetre oly pontsokaság, mely kizárólag belső pontokból áll, mely továbbá önmagában összefügg, a mivel azt fejezzük ki, hogy a sokaság bármelyik két pontja közé lehet véges számban a sokaságba tartozó pontokat közbeiktatni oly módon, hogy két egymást követő pont távolsága kisebb legyen egy tetszés szerinti kis mennyiségnél.

Nevezzük azt a pontsokaságot, melynek e kettős tulajdonsága van, röviden *kontinuumnak*, akkor úgy mondhatjuk, hogy az egyértékű analitikai függvény folytonossági tartománya kontinuumot alkot. Az előbb fölvetett kérdésre a felelet olyan, hogy abban a folytonossági tartomány jellemző vonása meg van jelölve. Érvényes tehát a következő tétel:

Ha adva van egy tetszésszerinti kontinuum, akkor mindig létezik olyan egyértékű analitikai függvény, melynek folytonossági tartománya az adott kontinuummal azonos.

Ezt az alapvető fontosságú tételt legelőször Mittag-Leffler [5] bizonyította be abban az értekezésében, a mely az analitikai függvények előállítására vonatkozik. Runge [6] és később Stäckel [7] igen egyszerű elemi uton bizonyították ugyanezt a tételt.

További és mélyebb kérdésekhez vezet ama pontok vizsgálata, a melyek a folytonossági tartomány határán vannak. Ezek a szinguláris pontok maguk is pontsokaságot alkotnak, a melynek alkotása az egyértékű függvények legfontosabb osztályozási alapjául szolgál.

Weierstrass 1876-ik évi «Az egyértékű analitikai függvények elméletéhez» czimű klasszikus értekezésében fejeztetik ki először teljes határozottsággal ez az osztályozási elv. Ez után Guichard[8] és később a legnagyobb általánosságban Mittag-Leffler foglalkozott a tárgygyal a már említett értekezésében.

Az egész tárgyalás alapjait Cantor-nak[9] a pontsokaságra vonatkozó tételei alkotják, a melyeket a függvénytani alkalmazásokra való tekintettel Bendixon[10] és Phragmen[11] több tekintetben kiegészítettek.

Ez tételeknél a Cantor-féle transfinit számok fontos szerepet játszanak. Azért tehát ez számalakzatokkal, melyek a közönséges egész számok fogalmának lényeges általánositásai, foglalkoznom kell.

Tekintsük a közönséges egész számokat, akkor észreveszszük, hogy az egyiktől a másikhoz való átmenet az egység hozzáadásával eszközöltetik. Az egységnek ez hozzáadását nevezzük *első alkotó elvnek.* Ez első alkotó elv folytatólagos alkalmazásával keletkezik a közönséges egész számok sora a sorozat elején álló számból, az 1-ből. A közönséges egész számoknak az 1-ből való előállításával egyelőre az első alkotó elv alkotó képessége teljesen kimerül. Hogy a közönséges egész számok során túl is lehetővé tétessék a számlálás, egy második alkotó elvre van szükségünk.

Ez a következő: Képzeljük a tárgyaknak bizonyos mennyiségét, a melyek egy bizonyos sorrendben adatnak, de úgy, hogy legmagasabb rendű ne legyen közöttük. Ezen tárgyak összességét, mint új fogalmat vezethetjük be a tárgyalásainkba. Ha már most az eredetileg adott tárgyakat, mint közönséges egész számokat jelöljük, akkor ezt az új fogalmat szintén egész számnak, és pedig a közvetlen magasabb egész számnak nevezzük. Ezt az eljárást, melylyel a már meglevő egész számok végtelen sorából, melyek között legnagyobb nem volt, egy új egész számot alkottunk, nevezzük *második alkotó elvnek.* Igy szolgáltatja a közönséges egész számok sorának fogalmi összefoglalása az első túlvéges (überendlich) számot ω-t, mely tehát a közönséges egész számokhoz képest a közvetlen nagyobb szám. Ez ω egész számnak a második alkotó elvvel való megteremtése után ismét az első alkotó elv lép működésbe és az egész számoknak ω-hoz csatlakozó $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3, \ldots$ sorozatát létesíti. Minthogy pedig a közönséges egész számoknak, valamint a hozzájuk csatlakozó ω, $\omega+1$, $\omega+2, \ldots$ stb. számok sorozatában legnagyobb szám nincsen, megint a második alkotó elv lép életbe, a mely a közvetlen nagyobb, legczélszerűbben $\omega.\,2$-vel jelölhető egész számot szolgáltatja. Ehhez csatlakozik az első alkotó elv révén az $\omega.\,2+1$, $\omega.\,2+2, \ldots$ számok sorozata. Ily módon keletkezik az első és második alkotó elvek egymásba kapcsolódása révén a véges és túlvéges számok határtalanul kiterjedő sorozata.

Figyelemre méltó már most, hogy ez számok rendszerében természetes bevágások vannak, a melyek által meghatározott számosztályokba oszlik.

Legelőször is a közönséges véges számokat tekintjük egy osztályba, az első számosztályba tartozóknak. Ha már most egy tetszésszerinti túlvéges a számot tekintünk, akkor lehetséges, hogy az a-nál kisebb számok az első számosztály számaival megszámlálhatók, vagyis az a-nál kisebb számok és a közönséges egész számok egymásnak egyértéküen, megfordithatóan megfeleltethetők. Azon túlvéges számok, melyeknek ez a tulajdonságuk van, alkotják a második számosztályt. A második számosztály számai oly sokaságot alkotnak, mely az első osztály számaival nem számlálható meg. Ezen a tényen alapszik a harmadik számosztály értelmezése s. i. t.

Ezeket az általános meghatározásokat alkalmazzuk a pontsokaságok elméletében. Egyszerűség kedveért csakis a gömbön levő pontsokaságokra szorítkozom.

Ha ilyen pontsokaság P végtelen sok pontot tartalmaz, akkor, miként ismeretes, vannak határhelyei, azaz vannak olyan pontok a gömbön, melyeknek bárminő kis környezete is végtelen sok pontját tartalmazza a pontsokaságnak.

E határhelyek összessége alkotja a P' pontsokaságot, melyet

CANTOR szerint a P pontsokaság leszármazottjának nevezünk. Ha a P sokaság csak véges számú pontot tartalmaz, akkor nincsenek határhelyei. Ekkor a leszármazottja P' zerus.

Ha a P' minden pontja az eredeti P-hez tartozik, akkor a P sokaság «zárt». Elégséges, ha csak ilyen sokaságra vagyunk tekintettel, mert az egyértékű analitikai függvény szingularitásai mindig zárt sokaságot alkotnak. (Más szóval: a szingularis pontok minden határhelye szintén szingularis pont).

Legyen már most a gömbön egy zárt P sokaság. Ennek leszármazottja P', ezé P'', ezé P''' s. i. t. Ily módon a P sokaságból a sokaságok egész sora:

$$P'\ P'', P'''\ldots$$

keletkezik.

És most foglaljuk össze azokat a pontokat, a melyek e pontsokaságok mindenikében foglaltatnak. Ezek megint oly pontsokaságot alkotnak, melyet P^{ω}-val jelölhetünk, a hol ω az első túlvéges számot jelenti, P^{ω} leszármazottját jelöljük $P^{\omega+1}$-gyel, ennek a leszármazottját $P^{\omega+2}$-vel s. i. t. A $P, P', P'', \ldots P^{\omega}, P^{\omega+1}, P^{\omega+2}, \ldots$ közös pontjai ismét pontsokaságot alkotnak, melyet $P^{\omega+1}$-vel jelölünk s. i. t. Látható, hogy ennek az eljárásnak folytatása révén minden véges, vagy túlvéges α számhoz egy meghatározott $P^{(\alpha)}$ leszármazott tartozik. (Nincs kizárva, hogy egyik leszármazott és azután természetesen minden következő is zerussá válik). A függvénytanban CANTORnak a következő két tétele szerepel:

1. *Ha a P zárt pontsokaság megszámlálható, akkor van mindig olyan P^{α}, a mely véges számú pontból áll. Az α vagy az első, vagy a második osztályba tartozó szám.*

2. *Ha a zárt P pontsokaság nem megszámlálható, akkor a P leszármaztatottjai között nincs egy sem, a mely véges számú pontból állana. De van olyan első, vagy második osztályba tartozó α, melyre nézve $P^{(\alpha)}$ a $P^{(\alpha+1)}$-gyel identikus.*

Ez a P^{α} leszármazott sokaság ugynevezett perfekt pontsokaság, azaz olyan, a mely nem csak valamennyi határhelyét magában foglalja, hanem a melynek minden pontja egyuttal határhely.

A CANTOR-féle tételek értelmében az egyértékű analitikai függvényeknek két nagy osztályát különböztethetjük meg:

Az egyik osztályba azok tartoznak, melyeknek szingularis pontjai megszámlálható sokaságot alkotnak; a másikba pedig azok, a melyek szinguláris pontjai meg nem számlálható sokaságot alkotnak.

A MITTAG-LEFFLER-féle tétel bizonyításánál használt módszerekkel sikerül az első osztályba tartozó függvényeket oly egyszeresen rendezett összeggel előállítani, melynek minden tagjának csak egy-egy szinguláris pontja van, még pedig olyan, a mely egyúttal az előállitandó függvénynek is szinguláris pontja. A második osztályba tartozó függvények esetében ez nem lehetséges. Ebben az esetben csakis azt tehetjük, hogy az előbb emlitett összeg levonásával bizonyos szinguláris pontokat eltávolitunk. A megmaradó különbség olyan függvény leend, melynek szinguláris pontjai a CANTOR-féle tételben emlitett perfekt $P^{(\alpha)}$ sokaságot alkotják.

Az analitikai előállitás tekintetében azok a függvények, a melyeknek szinguláris pontjai perfekt sokaságot alkotnak, irreducibilis jellegűek. E függvények egyébként még egy más módon is jellemezhetők. Valamely szinguláris pont ugyanis vagy szinguláris pontok határhelye, vagy nem az. Az utóbbi esetben az illető szinguláris pont «izolált». A szóban forgó függvények már most úgy jellemezhetők, hogy azoknak nincsen isolált szinguláris pontjuk.

Az egyértékű függvények analitikai előállításánál WEIERSTRASS észlelt legelőször olyan körülményt, melyet röviden érinteni akarok, mert egész sereg újabb dolgozat foglalkozik vele. Könnyen hihetnők, hogy oly összetartó sor, melynek tagjai raczionális függvények, mindig egyetlen egy analitikai függvényt értelmez. De nem így van a dolog, hanem ellenkezőleg, vannak olyan sorok, melyek különböző tartományokban teljesen különböző analitikai függvényeket értelmeznek.[12]

Egy másik tünemény, melyet szintén WEIERSTRASS vett észre, abból a már emlitett tételből következik, hogy minden kontinuumhoz tartoznak analitikai függvények. Azt a tüneményt értem, hogy vannak függvények, melyeknek természetes határuk van, azaz olyan függvények, melyeknek folytonossági tartománya e tartomány határát alkotó szinguláris pontokkal együtt, nem tölti be az egész gömböt. Didaktikai szempontból kivánatos, hogy ismerjünk ilyen függvényeket. E kivánságot egész sor dolgozat elégíti ki, melyek leginkább ezen függvényeknek speciális osztályára vonatkoznak.[13]

Tekintsünk oly véges összetartási körrel biró hatványsort, melynek e körön túl nincs analitikai folytatása. E hatványsorral értelmezett függvény folytonossági tartományát ezen összetartási kör belseje alkotja; a függvény szinguláris pontjai pedig a kerület pontjai. Egyébként hatványsorokra vonatkozó dolgozatok alapján azt kell képzelnünk, hogy bizonyos tekintetben az összetartási körön túl is folytatható hatványsorok a *kivételt*, a nem folytathatók ellenben a *szabályt* alkotják.[14]

Térjünk vissza az egyértékű analitikai függvények osztályozásához. Beosztottuk őket a szinguláris pontok alkotta pontsokaság természete szerint; közelfekvő gondolat, hogy további osztályozás czéljából a függvénynek a szinguláris pont körüli magaviseletét tekintsük. Az első kérdés az, hogy melyek azok a jellemző eltérések, a melyek a függvénynek a szingularis pont környezetében való magaviseletében mutatkoznak?

Tekintsünk először is egy izolált szingularis pontot, akkor a változónak a szinguláris pont felé közeledésekor kétféle magaviseletet tanusíthat a függvény; vagy minden határon túl nő a függvényérték, bárminő irányban történjék is a szinguláris ponthoz való közeledés, vagy nem.

Az első esetben a szinguláris pont, miként ismeretes, *polus*, vagy más névvel «lényegtelen szinguláris pont», a második esetben pedig «lényeges».

Képzeljünk az izolált lényeges szinguláris pont körül oly kört, mely más szingularis pontot nem tartalmaz, és figyeljük meg azokat az értékeket, a melyeket a függvény ezen kör belsejében fölvesz. Picard egyik klasszikus tétele szerint csak két eset lehetséges: a függvény vagy minden értéket felvesz e körön belül, vagy pedig minden értéket egyetlen egynek kivételével.

Ezen tételt Picard a modulfüggvények segítségével bizonyítja.

E tétel egyszerübb eseteit HADAMARD és BOREL elemi segédeszközökkel bizonyították.[15]

A nem izolált szinguláris pontokra vonatkozólag a PICARD tételének megfelelő tétel nem ismeretes. Egyáltalában tudtommal az analitikai függvénynek a nem izolált szingularis pont környezetében való magaviselete még behatóan nem tanulmányoztatott. Mégis megemlíthető egy idetartozó tünemény, mely LERCH egyik dolgozatából következik, melyet később FREDHOLM különösen kiemelt és PRINGSHEIM kimerítően tárgyalt.[16] Miként előbb említtetett, egy véges összetartási körrel biró hatványsor, mely az összetartási körön túl nem folytatható, oly egyértékű analitikai függvényt értelmez, melynek szinguláris pontjai az összetartási kör kerületének pontjai. Lehet olyan példákat alkotni, a melyeknél nem csak maga az analytikai függvény, hanem egyuttal minden differencziálhányadosa is folytonos az összetartási körben, annak kerületét is ideértve.

A többértékű analitikai függvények értelmezési tartománya a gömböt, vagy annak valamely részét többszörösen, esetleg végtelen sokszorosan beborítja. E tartományok jellemző tulajdonságai még eddig nem tárgyaltattak. Ezekre vonatkozólag legalább a következőt tudjuk :

Ha a z változónak bizonyos értékét tekintjük, akkor a végtelen sokértékű függvénynek a z-hez tartozó értékei mindig *megszámlálható* sokaságot alkotnak. Ezen, CANTOR-tól közölt tétel bizonyításával VIVANTI, POINCARÉ és VOLTERRA foglalkoztak.[17] E tételből következik, hogy valamely tetszésszerinti z pont környezetében minden végtelen sok értékű függvény RIEMANN módja szerint egyértékűvé változtatható az által, hogy a függvényértékeket végtelen sok levélen helyezzük el, melyek bizonyos meghatározott módon számoztatnak.

POINCARÉ még más eszmekapcsolattal is visszavezeti a több értékű függvényeket egyértéküekre.[18] POINCARÉ ugyanis megmutatta, hogy ha két komplex változó közül egyik a másiknak függvénye, akkor mindig előállitható mindkettő egy segédváltozó egyértékű függvényei gyanánt.

Ámbár a WEIERSTRASS-féle függvényelmélet az analitikai függvényt, mint a számfogalom természetes általánositását fogja fel, mégis kifogásolhatjuk ennél az értelmezésnél, hogy egy speczialis alakkal, a hatványsorral jellemzi az analytikai függvényeket. Ez az ellenvetés a RIEMANNtól is elfogadott CAUCHY-féle értelmezést nem illeti. De a CAUCHY-féle értelmezésnek megint más baja van: ennél az elmélet szigorú megállapitása kezdettől fogva nagy nehézségekbe ütközik. Ennek a belső oka abban keresendő, hogy kezdettől fogva a határforgalomnak legnehezebb esetére van szükségünk. CAUCHY és RIEMANN természetesen nem ismerték teljesen ezeket a nehézségeket. Csakis újabb szerzők foglalkoztak a CAUCHY-RIEMANN-féle elmélet szigorú megállapitásával. Kitünt, hogy a CAUCHY-féle értelmezés, mely szerint valamely függvény analitikai — vagy miként CAUCHY mondja — synektikus, ha egyértékű differencziálhányadosa van, szigorúbb értelmezéssel helyettesitendő; talán így kellene értelmezni:

Synektikus a számsík valamely kontinuumára nézve értelmezett függvény, ha a kontinuum minden pontjában folytonos, ha úgy a növekvő abscissák, mint a növekvő ordináták irányában van differencziálhányadosa és ha e két differencziálquotiens minden pontban egymással megegyezik és ez a közös érték az illető kontinuumban szintén folytonos függvény.

Ha CAUCHY- és RIEMANNAL a synektikus függvényt az által értelmezzük, hogy egyértékű differencziálhányadosa létezzék, akkor természetesen mindjárt fölmerül a kérdés, hogy miképpen viselkednek ezek a függvények az integrálásnál? Erre, miként ismeretes, a CAUCHY-féle integráltétel adja meg a választ. Ezt a tételt röviden, bár nem egészen pontosan úgy fejezhetjük ki, hogy a synektikus függvények nem csak egyértékű *differencziálást*, hanem egyuttal egyértékű *integrálást* is megengednek.

Sőt azt is megtehetjük, hogy a differencziálás egyértékűségének követelése helyett az integrálás egyértékűségét választjuk az egész elmélet kiinduló pontjául. Ez MORERA [19] egyik érdekes megjegyzéséből következik, mely szerint az a függvény, mely egy kontinuumban folytonos és minden zárt görbe mentén integrálva, zérust ad, okvetlenül a CAUCHY-féle értelemben synektikus.

A Cauchy-féle integráltétel könnyen bizonyitható be abban az esetben, ha az integrálás görbéjeül bizonyos egyszerű vonalakat, például kört, vagy derékszögű négyszög kerületét választjuk. Sok esetben elégséges is ha csak ezen speczialis görbékre szorítkozunk; így pl. ha azt akarjuk kimutatni, hogy a Cauchy- és a Weierstrass-féle függvényfogalmak fedik egymást. De legtermékenyebb a Cauchy-féle tétel a maga teljes általánosságában és ennek a bizonyítása nehézséggel jár. Ujabban Falk, Goursat, Lerch, Jordan és Pringsheim foglalkoztak a Cauchy-féle tétel kifogástalan bebizonyításával.[20] A Cauchy-féle tételt a következőképpen fejezhetjük ki:

Ha az $f(z)$ függvény valamely kontinuumban, melyben minden egyszerüen zárt görbe egy felületrészt teljesen behatárol, synektikus, akkor $\int f(z)dz$ *mindig* 0, *ha az integrálás egy, teljesen a kontinuumban fekvő zárt vonal mentén történik.*

Ezzel kapcsolatosan azonnal a következő kérdések merülnek fel: mi az az egyszerüen zárt vonal, s általában, mi a vonal, mi a zárt vonal és vajjon minden zárt vonal, vagy csak bizonyos zárt vonalak szerepelhetnek-e Cauchy-féle tétel kifejezésében?

Ezeket a kérdéseket már azért is szivesen fejtegetném, mert elvi fontosságuak. A következő meggondolásból indulok ki:

Egy P zárt pontsokaságot úgy vonatkoztassunk egy másik zárt pontsokaságra Q-re, hogy a P minden egyes pontjának a Q meghatározott pontja feleljen meg. A vonatkozásnak még a következő tulajdonsága legyen:

Ha a P-ben levő $A_1, A_2, A_3, \ldots$ pontoknak egyetlen A határhelyük van, akkor a Q-ben fekvő, megfelelő $B_1, B_2, B_3, \ldots$ pontoknak is egy meghatározott B határhelyük legyen és az A határhelynek a B határhely feleljen meg.

Ekkor azt mondjuk, hogy a Q sokaság *folytonos* vonatkozásban van a P-hez, vagyis a Q *folytonos képe* a P-nek.

A görbeiv közönséges értelmezése, a mely szerint ez oly pontok helye, melyek koordinátái egy valós változó folytonos függvényei, ezen fogalmi megállapitások után a következőként fejezhető ki:

Egy zárt pontsokaságot akkor nevezünk folytonos görbeívnek, ha egy egyenes köz folytonos képének tekinthető.

Nem szabad elfelednünk, hogy a folytonos görbeív e fogalma nem egyezik meg azzal, melyet a szemlélet alapján szoktunk megalkotni. PEANO és HILBERT [21] tényleg megmutatták, hogy pl. egy négyzet pontjai az egyenes köz folytonos képének tekinthetők. A négyzet pontjai tehát a megállapított értelemben folytonos görbeívet alkotnak. Természetesen a négyzet pontjai bizonyos meghatározott sorrendben gondolandók, a mennyiben éppen az egyenes köznek felelnek meg.

A *egyszerüen zárt folytonos görbe* fogalmát a következő meggondolásokkal alkothatjuk meg:

A zárt Q pontsokaság a P zárt sokaság folytonos képe legyen; de egyúttal a kettő közötti vonatkozás egyértéküen megfordítható. (Ekkor egyuttal a P is folytonos képe a Q-nak).

Ha két pontsokaság ily módon egyértéküen, megfordíthatóan és folytonosan vonatkozik egymásra, akkor æquivalenseknek nevezzük őket és erre az æquivalentia fogalomra alapithatom a pontsokaságoknak osztályokba sorozását. Két zárt pontsokaság ugyanabba vagy különböző osztályba tartozik, a szerint a mint æquivalensek, vagy nem. Mellesleg megjegyzem, hogy a pontsokaságoknak osztályokba sorozása az analysis situs legáltalánosabb alapja. Az analysis situs feladata, hogy az egyes osztályok invariansait keresse.

Az egyszerüen zárt folytonos görbe oly pontsokaság, mely ugyanabba az osztályba tartozik, mint a négyzet kerületét alkotó pontsokaság.

Ehhez füződik a következő alapvető tétel:

A síkot a benne levő egyszerüen zárt folytonos görbe két kontinuumra osztja, melyeknek közös határa az illető görbe.

Kissé eltérő fogalmazásban állítja föl és bizonyitja be ezt a tételt JORDAN az ő Cours d'Analyse-jében, míg ujabban SCHOENFLIESS a tétel egy speczialis esetére szolgáltatott egyszerü bizonyitást.[22]

Miután a folytonos görbe és az egyszerüen zárt folytonos görbe fogalmait megállapitottuk, most már közelebbről kell meghatároznunk, hogy a CAUCHY-féle tétel kifejezésében minő integráczió-görbék szerepelhetnek. E czélból a görbeiv hosszúságának fogalmával kell foglalkoznunk.

Ha adva van egy folytonos görbeiv, akkor kezdőpontjától egészen a végeig haladó sokszögrészt irhatunk beléje és azután a sokszögrész csúcsait a görbeiven mindenütt sűrűvé (überall dicht) tehetjük. Ha a sokszögrész hossza e közben mindig ugyanahhoz a határértékhez közeledik, akkor ez a határérték az ív hossza; ekkor a görbe ive *kiegyenesíthető*. Ellenkező esetben a görbeívnek nincs hossza, nem egyenesíthető ki.

Ezt az értelmezést választotta kissé korlátoltabb görbefogalom esetében az oly korán elhalt Scheeffer a görbe vonalak ívhosszára vonatkozó vizsgálatai alapjául.[23] Du Bois-Reymond Pál kifogásolta ezt a Scheeffer-féle értelmezést.[24] Úgy látszik, nem volt igaza. Mert a mathematikai fogalomalkotás birodalmában az általánosításnak csak természetes, nem pedig mesterséges akadályok előtt kell megállapodnia. És az a tény, hogy a bővebb fogalomnál a szűkebb fogalom egyik másik tulajdonsága hiányzik, nem teszi lehetetlenné az elsőt, hanem ellenkezőleg a dolog természetében rejlik.*

A Cauchy-féle tétel mindenesetre érvényes, ha az $\int f(z)\,dz$ kiegyenesíthető görbe mentén végeztetik, melynek kezdő- és végpontjai egybeesnek. Ezt teljesen szigorúan Jordan bizonyitotta be.

A Cauchy-féle tételnek elemi bebizonyítását közölte ujabban Pringsheim.[25] E tárgyalásainál Pringsheim más, speczialisabb görbe fogalmat választ kiinduló pontul. Megjegyzendő azonban, hogy Pringsheimnál az integráczió-görbe szintén az előbbi értelemben kiegyenesíthető, folytonos görbe.

Az analitikai függvény Cauchy-Riemann-féle értelmezésének egyik előnye abban van, hogy a felületek konform leképezésének fontos és érdekes tárgyalására vezetett. Hiszen ismeretes, minő fontossága van a Riemann-féle függvénytanban annak a tételnek, hogy van egy és lényegben csakis egy analitikai függvény, mely a komplex számsik valamely egyszerűen összefüggő részét egy másik ilyen részre leképezi.

---

* Igy nyilatkozik, a mint legutóbb észrevettem Study is: «Egy valós változó függvényeinek egy speczialis osztályairól» szóló értekezésében. Math. Ann. 47. k. (1896).

Riemann e tétel bizonyitását, miként ismeretes, a nem egészen kifogástalan Dirichlet-féle elvre alapitotta. Neumann és Schwarz dolgozatai, melyekhez Harnack, Poincaré stb. dolgozatai csatlakoztak, később a Riemann-féle tételt legalább az egyszerüen összefüggő felületek nagy osztályára bebizonyitották.[26] A több változós analitikai függvények elméletének általános alapelveit szintén Weierstrassnak és Méraynek köszönhetjük.[27] A hatványsorok monogén rendszerének fogalmát könnyü a többváltozós hatványsorokra is átvinni és ezzel a többváltozós analitikai függvény fogalma is közvetlenül meg van adva. De az elmélet további kifejtése az egy-változós függvények elméletével szemben jelentékeny nehézségeket támaszt. Egyszerüség kedvéért csupán egyértékü függvényekre szoritkozunk. Az ilyen függvény folytonossági tartománya $2n$ dimenziós kontinuum leend, ha n a változók számát jelenti. Kontinuumnak itt is azt a pontrendszert nevezzük, mely önmagában összefügg és csupán belső pontokból áll. E kontinuumot határoló pontok a függvény szinguláris pontjai. De itt nem úgy van, mint az egy-változós analitikai függvényeknél; itt nem lehet minden kontinuum valamely egyértékü analitikai függvény folytonossági tartománya. Ez már abból is következik, hogy a több-változós analitikai függvénynek izolált szinguláris pontja egyáltalában nem lehet, a mint az az általánositott Laurent-féle tétellel könnyen bebizonyitható.

Egy más nehézség abban van, hogy a több-változós függvényeknél kétféle lényegtelen szinguláris pontot kell megkülönböztetnünk. Weierstrass szerint a szinguláris pont akkor lényegtelen, ha környezetében a függvény két hatványsor hányadosa gyanánt állitható elő. Az ilyen pont az első, vagy a második fajtához tartozik a szerint, a mint a függvény reciprok értékére nézve szabályos, vagy szinguláris pont.

A több-változós analitikai függvények osztályozása még kezdetleges fokon van. E tekintetben csakis az elmélet kezdetével rendelkezünk a következő tételekben:

1. Az az egyértékü függvény, melynek csak lényegtelen szinguláris pontjai vannak, szükségképpen racziónális függvény[28] és

2. az az egyértékü függvény, melynek a végesben csak lényegtelen szingularis pontjai vannak, két, mindenütt összetartó hatványsor hányadosa gyanánt állítható elő.[29]

Az utóbbi tétel különösen azért figyelemre méltó, mert bebizonyítása igen nagy nehézségekbe ütközik. Csak ujabban sikerült Cousin Péternek a tétel általános bizonyítása, miután Poincaré magasabb segédeszközökkel a kétváltozós függvények esetében a tételt bebizonyitotta.

Egyébként ugyancsak a Cousin-féle eszmekörben mozognak Biermann és Appell korábbi dolgozatai is, a melyek a Mittag-Leffler-féle tételnek több-változós függvények esetére való kiterjesztésére vonatkoznak.[30]

A több-változós függvények körében a Cauchy-Riemann-féle irányt Kronecker, Picard és Poincaré munkálatai követték.[31] Ezek a dolgozatok a Cauchy-féle integráltételnek és következményeinek a többváltozós függvényekre való kiterjesztésével foglalkoznak.

Végezetül még röviden azokat a törekvéseket említeném, melyek az analitikai függvények elméletének általánosítását czélozzák. A három és többméretű potencziál kiterjedt elméletétől eltekintve, először is Picard és Scheffers dolgozatait kell említenem.[32] Picard azt a parcziális differencziálegyenletet általánosítja, a melynek az analitikai függvény valós és képzetes részei eleget tesznek és pedig oly módon, hogy e differencziálegyenlet csoportelméleti tulajdonságát tekinti jellemző tulajdonságnak. Scheffers pedig arra törekszik, hogy a függvénytani fogalmakat olyan számrendszerekre alkalmazza, melyek nem két, hanem több egységből keletkeznek. Más irányban dolgozik több fiatal olasz mathematikus. Mathematikai physikai fogalmakból kiindulva, Volterra vonalak függvényeit vizsgálja, vagyis olyan törvényszerüségeket, melyek a tér minden vonalához meghatározott complex számértéket rendelnek.[33] Hasonló kutatásokat végeznek Pincherle, Levi-Civita és Bourlet.[34] Ezeknél a vizsgálatoknál azokat a törvényeket tárgyalják, a melyek valamely függvényből más függvényt létesítenek. Magasabb szempontból tekintve a dolgot, a függvények függvényeivel foglalkoznak.

De nem foglalkozhatom bővebben e dolgozatokban foglalt érdekes vizsgálatokkal, mert az analitikai függvények elméletének tulajdonképpeni körén túl terjednek.

Ford. *Beke Manó.*

Irodalmi adatok és jegyzetek.*

(A bekerített évszámok és lapszámok a Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik azon kötetére vonatkoznak, a melyekben az idézett dolgozat ismertetése foglaltatik).

1. Cauchy Analyse algèbrique p 151. Résumé analytique p. 17.

2. J. Hadamard Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Journal de mathématiques (4) vol. 8. (1892. 359).

L. még: Biermamn O. Über Functionen zweier reeller Variabeln Math. Ann. 48. p. 395.

A szóban forgó törvény igy hangzik:

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ végtelen sor összetartási körének sugara a

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \ldots \sqrt[n]{|c_n|}, \ldots$$

«felső határá»-nak recziprok értéke.

3. Méray, Nouveau Précis d'Analyse infinitesimale (Paris 1872).

« Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitesimale (Paris 1894—97)

4. Weierstrass K. Zur Theorie der eindeutigen analyt. Functionen p. 1 Abhandlungen aus der Functionentheorie (Berlin 1886).

5. G. Mittag-Leffler Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. Acta Math. 4. (1884, 351).

6. C. Runge Zur Theorie der eindeutigen analyt. Functionen Acta Math. 6. (1885, 379.)

7. Stäckel P. Zur Theorie der eindeutigen analyt. Functionen Crelles Journal 112. (1893, 681).

8. Guichard Théorie des points singuliers essentiels Ann. de l'Ecole Normale (2). Vol. 12. (1883, 330).

9. G. Cantor Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten Math. Ann. 15, 17, 20, 21, 23. Acta Math. 2, 4, 7.

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre Math. Ann. 46, 49.

10. J. Bendixson Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points Acta Math. Vol. 2. (1883, 255.)

---

* Ez a jegyzék csak az 1880. óta megjelent irodalomra vonatkozik. Régebbi publikácziók közül csakis egyes alapvető fontosságuak említtettek.

11. E. PHRAGMÈN Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre. Acta Math. 5. (1884, 333).

Über die Begrenzungen von Kontinua Acta Math. 7. (1885, 550).

12. Ha C_1 $C_2 \ldots C_n$ egyszerüen zárt vonalak, a melyek egymást kölcsönösen kizárják, és $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots f_n(z)$ olyan analitikai függvények, melyek e vonalakon és azokon belül szabályosak, akkor :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{f_1(\zeta)\, dz}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \frac{f_2(\zeta)\, dz}{\zeta - z} + \ldots + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{f_n(\zeta)\, dz}{\zeta - z}$$

olyan analitikai kifejezés, mely C_i zárt görbe belsejében az $f_i(z)$ függvényt állítja elő. A vonalintegrál eredeti értelmezése szerint azonban a jobb oldalon álló integrálok nem mások, mint z raczionális függvényeinek határértékei, melyek egy egész számú, végtelenig haladó indextől függnek. E szerint tehát a jobb oldalon álló kifejezés lim $R_n(z)$ alakban irható úgy, hogy :

$$F(z) = R_1(z) + [R_2(z) - R_1(z)] + [R_3(z) - R_2(z)] + \cdots,$$

végtelen sor, melynek tagjai a z raczionális függvényei. Ilyen összeg tehát a tetszőleges C_1, $C_2, \ldots C_n$ által határolt tartományokban egészen tetszőlegesen megállapított $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots f_n(z)$ függvényeket állíthat elő.

WEIERSTRASS K. Zur Functionenlehre. Sitzungsberichte der Berl. Akademie (1880, 310.)

Abhandlungen aus der Functionenlehre.

Gesammelte Werke 2. kötet. (Berlin 1895.)

G. MITTAG-LEFFLER Recherches sur la théorie des Functions. Darboux Bulletin (2) 5. köt. (1881, 307.)

Több czikkecske a Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. de Paris-ben 94, 95. (1882, 325).

CH. HERMITE Sur quelques points de la théorie des fonctions Crelles Journal 91. kötet (1881, 307).

APPELL Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle. Acta math. 1. (1883, 323.)

Développements en série d'une function holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. Mathem. Ann. 21. (1883, 324.)

S. PINCHERLE Sopra una formola del sign. Hermite Rom. Acc. L. Rend. (4). 1. köt. (1885, 388.)

M. LERCH Note sur les expressions, qui dans diverses parties du plan, représentent des fonctions diverses. Darboux Bull. (2). 10. k. (1886, 345).

STÄCKEL L. 7. alatt.

PUZYNA J. Über eine methodische Bildung der analyt. Ausdücke $\Sigma f_\nu(x)$, $\Sigma f_\nu(x, y)$ von constanten Werten. Monatshefte f. Math. 5. k. (1894, 711.)

F. d'ARCAIS Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse Rivista di Math. 5. k. (1896, 439.)

13. WEIERSTRASS l. 12. alatt.

GOURSAT Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes. Comptes Rendus 94. köt. (1882, 336.)

TH. HOMÉN Analytisk framställning af nagra lakunära funktioner. Soc. sc. Fenn. Acta 12. k. (1883, 341.)

POINCARÉ Sur les fonctions à espaces lacunaires. Comptes Rendus 96. k. Soc. sc. Fenn. Acta 12. k. (1883, 340/1.)

LERCH Contribution à la théorie des fonctions Prag. Ber. (1886, 330.)

STIELTJES T. J. Exemple d'une fonction qui n'éxiste qu' à l'intérieur d'un cercle. Darboux Bull (2) vol. 11. (1887, 380.)

GOURSAT E. Sur les fonctions à l'espace lacunaires. ibid. (1897, 394).

TEXEIRA G. Exemples de fonctions à espaces lacunaires. Nouvelles Ann. (3) 6. k. (1887. 394).

LERCH Über Functionen mit beschränktem Existenzbereiche Prag. Abh. (7) 2. köt. (1888, 412.)

LERCH Sur une classe de fonctions à espace lacunaire. Teixeira J. vol. 10. (1890, 388).

PRINGSHEIM Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analyt. Functionen mit beschränktem Existenzbereich. Münch. Ber. 22. köt. (1892, 356).

HADAMARD. L. 2. alatt.

POINCARÉ Sur les fonctions à espaces lacunaires American J. 14. kötet (1892, 388.)

STÄCKEL L. 7. alatt.

GOURSAT E. Sur une fonction à espace lacunaire Darb. Bull (2) 17. köt. (1893, 715.)

TEXEIRA F. G. Extrait d'une lettre adressée a M. Hermite u. o. (1893, 716.)

CAYLEY A. Note on lacunary functions. Quart. J. 26. k. (1893. 716.)

GILLET J. Sur les fonctions à espaces lacunaires. Progresso mat. vol. 3. (1893, 716.)

G, d'ARONE. Sur les fonctions à espaces lacunaires Bull. de la. Soc. math. de Fr. vol. 23. (1895, 427.)

BOREL E. Sur les séries de Taylor. Comptes Rendus 1896.

» Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure. Journal de Math. (4) vol 2. 1896.

FABRY E. Sur les points singuliers d'une fonction donnés par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux. Ann. de l'Ecole Normale (3) vol 13. 1896.

Sur les séries de Taylor. Comptes Rendus 1897.

Az analitikai folytatás lehetetlenségének elégséges föltételét a következő egyszerü alakban adja Fabry:

Az $a_1 z^{e_1} + a_2 z^{e_2} + \dots + a_h z^{e_h} + \dots$ hatványsornak, melyben $e_1, e_2, \dots$ az egész számok növekedő sorát alkotja, nincsen analitikai folytatása, ha $e_n - e_{n-1}$ minden határon túl növekszik.

14. L. FABRY és BOREL (3) alatt idézett értekezéseit és

PRINGSHEIM: Über Functionem, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen. Math. Ann. 44. pag 49/50. (1894, 389.)

15. PICARD E. Mémoire sur les fonctions entiéres. Ann. de l'Ecole Normale (2) vol. 9. (1880, 327.)

FARKAS GY. Sur les fonctions uniformes Comptes Rendus. vol. 96. (1883, 338)

G. d'ARONE Sur la fonction exponentielle Bull. de la Soc. math. de Fr. vol. 20. (1892, 399.)

HADAMARD Etude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Journ. de Math. (4) vol. 9. (1893. 698.)

BOREL E. Démonstration elémentaire d'un Theoréme de M. Picard. Sur les fonctions entiéres. Comptes Rendus vol. 122. (1896).

16. LERCH M. Über die Nichtdifferenzierbarkeit gewisser Functionen. Crelles Journal 103. k. (1888, 380.)

MITTAG-LEFFLER. Sur une transcendante rémarquable trouvée par M. Fredholm. Acta mathem. 15. k. (1891, 421.)

PRINGSHEIM l. 13 alatt.

A FREDHOLM által közölt függvény a következő:

$$f(x)=1+ax+a^2x^4+\cdots+a^nx^{n^2}+\cdots\ (|a|<1)$$

Hogy az egység sugarú körön túl nem folytatható, FABRYnak (3) alatti tételéből ered. A kongresszus alatt FREDHOLM beszélgetés közben figyelmeztetett arra, hogy az $f(x)$ megfordítása a alkalmas választása mellett egyértékű függvény. Tényleg, ha $|x|<1$, $|y|<1$, akkor könnyen belátható, hogy:

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|\Sigma a^n[x^{n^2-1}+x^{n^2-2}y+\ldots+xy^{n^2-2}+y^{n^2-1}]|$$
$$>|a|-4|a|^2-9|a|^3-\ldots-n^2|a|^n-\ldots,$$

tehát ha $|a|$ elég kicsinynek vesszük, csakis akkor lehet $f(x)=f(y)$ ha $x=y$.

17. VIVANTI G. Sulle funzioni ad infiniti valori. Palermo Rend. vol. 2. (1888, 393.)

POINCARÉ H. Sur une propriété des fonctions analytiques, u. o. (1888, 393.)

VOLTERRA V. Sulle funzioni analitiche polidrome. Rom. Acc. L. Rend. (4). vol. 4. (1888, 394.)

VIVANTI G. Sulle funzioni analitiche. Palermo Rend. vol 3. (1889, 395.) u. a. Zur Theorie der mehrwertigen Functionen Schlömilch Z. 34. kötet (1889, 395.)

18. POINCARÉ H. Sur un théorème de la théorie générale des fonctions. Bull. de la Société math. de Fr. vol. 11. (1883, 348.)

19. MORERA G. Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa. Lomb. Ist. Rend. (2) vol. 19. (1886, 338.)

OSGOUD W. F. Some points in the elements of the theory of fonctions. Bulletin of the American mathem. Society (2) vol 2. 1896.

20. FALK M. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Darboux Bull. (2) vol. 7. (1883, 317.)

GOURSAT E. Démonstration du théorème de Cauchy. Acta math. vol. 4. (1884, 236.)

LERCH M. Sur une démonstration du théorème de Cauchy sur les integrales prises entre des limites imaginaires. Prag. Ber. (1887. 273.)

C. JORDAN. Cours d'Analyse (Paris 1893) I. k.

PRINGSHEIM A. Über den Cauchy'schen Integralsatz. Münch. Berichte 25. köt. (1895, 318.)

PRINGSHEIM. Zum Cauchy'schen Integralsatze u. o. (1895, 318.)

21. PEANO G. Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. Math. Ann. 36. k. (1890, 405.)

HILBERT D. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück u. o. 38. k. (1891, 422).

22. JORDAN C. l. 20 alatt.

SCHOENFLIES A. Über einen Satz aus der Analysis situs. Göttinger Nachr. 1896.

23. SCHEEFFER L. Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven Acta Math. 5. (1884, 338.)

24. DU BOIS REYMOND P. Über den Begriff der Länge einer Curve u. o. 6. k. (1885, 270).

25. PRINGSHEIM l. 20 alatt.

26. SCHWARZ H. A. Gesammelte math. Abhandlungen (Berlin 1890) II. k.

NEUMANN C. Untersuchungen über das logarithmische und Newtonische Potential. (Leipzig 1871).

Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale (Leipzig 1884).

Über die Methode des aritmetischen Mittels I. u. II. Leipziger Abhandlungen 13. és 14. k. (1887, 1029 és 1888, 1015).

HARNACK A. Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials. Leipzig 1887.

KLEIN F. Über die konforme Abbildung von Flächen. Mathem. Ann. 19 (1881, 656.)

VOLTERRA V. Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa. Brioschi Ann. (2) 11. k. (1883, 358.)

RIEMANN J. Sur le probléme de Dirichlet. Ann. de l'Ecole Norm. (3) vol. 5. (1888, 383.)

POINCARÉ H. Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathematique. American J. vol. 12. (1890, 977.)

PAINLEVÉ P. Sur la théorie de la réprésentation conforme. Acta Math. v. 14. (1891, 890.)

W. BURNSIDE On fonctions determined from their discontinuities and a certain form of bordary conditions. London M. Soc. Proc. vol. 22. (1891, 420.)

PARAF A. Sur le problème de Dirichtet. Toulouse Ann. 6. (1892, 366.)

F. v. DALWIGK. Über den Ersatz des Dirichlet'schen Princips. Göttinger Nachr. 1894, 683.)

TAUBER A. Über die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels. Monatshefte f. Math. 5. (1894, 683.)

POINCARÉ La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta math. 20. (1896.)

NOBEL A. Über die Randwertaufgabe für eine ebene Randkurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente und ohne Spitzen. Göttinger Nachr. 1896.

PICARD Traité d'Analyse (Paris 1891/96).

27. MERAY Ch. 1. 3. alatt.

RIQUIER Sur les principes de la théorie générale des fonctions. Ann. de l'Ecole Norm. (3). 8. k. (1891, 422.)

28. HURWITZ A. Beweis des Satzes, dass eine einwertige Function beliebig vieler Variabeln, welche überall als Quotient zweier Potenzreihen dargestellt werden kann, eine rationale Function ihrer Argumente ist. Crelles Journal 95. k. (1883, 321.)

DAUTHEVILLE S. Étude sur les séries entières par rapport à plusieurs variables imaginaires indépendantes. Ann. de l'Ec. Norm. (3). 2. k. (1885, 366.)

29. POINCARÉ Sur les fonctions de deux variables. Acta math. 2. k. (1883, 358.)

COUSIN P. Sur les fonctions de n variables complexes. u. o. 19. kötet (1895, 456.)

30. APPELL P. Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes Acta math. 2. (1883. 357.)

BIERMANN O. Beitrag zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen. Wiener Ber. 89. k. (1884, 356.)

31. KRONECKER L. Über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln. Berliner Ber. 1869. vagy: Werke I.

PICARD Sur les périodes des intégrales doubles. Comptes Rendus 102. k. (1886, 354.)

POINCARÉ Sur les résidues des intégrales doubles. Acta math. 9. kötet (1887, 275.)

PICARD Sur une généralisation des équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Comptes Rendus 112. k. (1891, 411.)

PICARD Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Journal de Math. (4). 8. k. (1892, 331.)

32. SCHEFFERS G. Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich complexen Functionen Leipz. Berichte 45 és 46. k. (1894, 667.)

33. VOLTERRA V. Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Acta math. 12. (1889, 397.)

VOLTERRA V. egész sorozata az értekezéseknek a Rendiconti della Ac. dei Lincei 4-ik sorozatának 3, 4, 5, 6. köteteiben.

ARZELÁ G. Funzioni di linee u. o. 5. e.

ARZELA Sulle funzioni di linee. Bologna Mem. (5). 5. k. (1895, 454.)

FABRI CORNELIA Sopra alcune proprieta generali della funzioni che dipendero da altre funzioni e da linee. Atti di Torino 25. k. (1890, 401.)

34. PINCHERLE a Mem. dell'Accad. di Bologna 4-ik seriesének 6, 7, 8. kötetében több értekezés, továbbá az Acta math. 10. köt. a Lomb. Ist. Rend. (4). 20. köt. és a Rom. Acc. L. Rend. (5). 4-ik kötete. Értekezéseinek összefoglal

tárgyalását közölte PINCHERLE újabban ezen a czimen: Mémoire sur le calcul fontionnel distributif a Math. Ann. 49. köt.

B. CALO Sulle operazioni funzionali distributive. Rom. Acc. L. Rand. (5). 4. köt. (1895, 434.)

LEVI-CIVITA Sui gruppi di operazioni funzionali Lomb. Ist. Rend. (2). 28. köt. (1895, 434/5.)

VOLTERRA Sull' inversione degli integrali definiti. Rom. Acc. L. Rend. (5). 5. köt. Torino Atti. 31. k. (1896.)

BOURLET Sur les operations, en général, et les équations differentielles linéaires d'ordre infini. Ann. de l'Ecole Norm. (1897.)

A SZÁZADOK ELNEVEZÉSÉNEK KÉRDÉSÉHEZ.

Valahányszor két irányban végtelen sokaságot kell megszámlálnunk, a pozitiv és negativ egész számokra és a 0-ra van szükségünk.

Így időszámitásunkban Krisztus születésének évét 0-sal, az azután következő éveket pozitiv egész számokkal, az azelőtt lefolyt éveket negativ egész számokkal jelöljük.

Nagyobb időegységnek a 100 évet tartalmazó időszakot, a *század*-ot használjuk. Minthogy ezek száma is két irányban végtelen, ezek jelölésére is a pozitiv és negativ egész számokat és a zérust kell használnunk.

0-dik századnak vagy a 0-dik évvel kezdődő, vagy a 0-dik évvel végződő századot vehetjük.

Az első felfogás szerint az n-dik század évei:

$$100\,n+a$$
$$[a=0, 1, 2, \ldots, 99].$$

A második felfogás szerint az n-dik század évei:

$$100\,(n-1)+a$$
$$[a=1, 2, \ldots, 100].$$

Az 1900-dik év az első felfogás szerint a XIX. század éve, a második felfogás szerint pedig a XIX. század záró éve.

A második felfogás következetesebb, mert e szerint Krisztus születése nemcsak a 0-dik évnek, hanem a 0-dik századnak is utolsó hetére esik.

A fennebbiekből látható, hogy mathematikailag nem okolható meg az a felfogás, a melyik szerint az 1900-dik év a XX. század kezdő éve volna. *Vályi Gyula.*

A VILLAMOS KEMENCZE TERMÉKEIRŐL.*

Kétezer Celsius-foknál magasabb hőmérséket kényelmes módon és ipari alkalmazásokra is czélszerüen csak rövid idő óta képes előállitani a mérnöki tudomány. Ugyan már húsz év előtt gondolt Siemens a villamos ív melegének kihasználására és első villamos kemenczéit már az 1881-iki párisi villamos kiállitáson bemutatta, mindamellett csupán Cowles, Acheson, Willson kisérletei és főleg Moissan beható tanulmányozásai után lett a volta-ív hője és az árammeleg a chemiai iparnak hathatós agensévé. Első sorban az aluminium gyártásánál vált be gyakorlatilag. Megjegyzendő azonban, hogy ott az áramnak nem csupán hőhatása, hanem első helyen elektrolytikus szétbontó hatása értékesittetik. A folyósítást elvégre árammeleg helyett direkt hevítés útján is el lehetne érni, sőt a helyi viszonyok szerint — például olcsó szén esetében — kisebb költséggel, de semmiesetre sem nagyobb kényelemmel. Azóta a villamos melegítésnek ily kombinált alkalmazása az elektrolysisnek lehetővé tételére egyéb elektrochemiai eljárásnál is igen hasznos szerepre jutott, teszem, konyhasónak direkt elektrolysisénél vagyis vízben való oldás nélkül, és egyáltalán valahányszor arról van szó, hogy magas hőmérséknél folyósitható vegyületekre alkalmaztassék elektrolytikus szétbontás.

Érdekes felemliteni, hogy mindkét elektrochemiai eljárásnak, úgy a tisztán elektrothermikusnak, mint az elektrolytikusnak közös atyja van, tudniillik Sir Humphrey Davy. Ő elektrolysált először folyósitott sókat és tudvalevőleg ő találta fel egyszersmind 1813-ban a volta-ívet is. Az általa használt szénpálczák azonban még

* Előadta s a szövegben emlitett termékeket bemutatta 1899. nov. 23-án ifj. Szily Kálmán. — A két ábrát Edvi Illés Aladár tanár úr szivességének köszönjük.

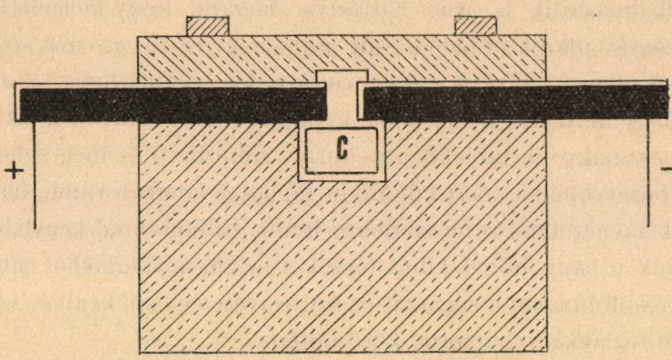
igen kezdetlegesek és rövid életűek voltak, mígnem Bunsen 1840 táján galváneleméhez való szénhengereinek gyártása közben rájött, hogy legczélszerűbb azokat agglomerált szénporból erős összenyomás és kiégetés segítségével előállítani, oly eljárás, melyből egy egészen modern, nagy külön ipar fejlődött.

Ha az elektrolytikus hatást tekinteten kívül hagyjuk és csupán a volta-ív melegének kihasználását tartjuk szem előtt, úgy a villamos kemenczének feladatát röviden ekkép fejezhetjük ki: «Kis térfogatban a lehető legmagasabb hőfoknak előállítása».

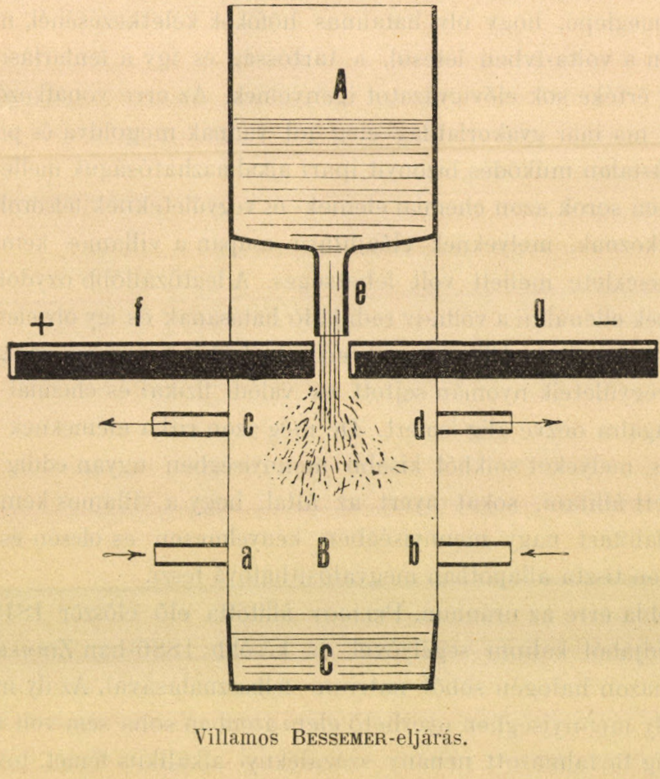
E czél megvalósításához okvetlenül kívánatos, hogy a volta-ívet körülzáró kemencze nemcsak a nagy hőmérsékletnek ellenálló, hanem egyszersmind igen rossz hővezető anyagból álljon, nehogy a melegnek nagy része átbocsátás útján veszendőbe mehessen. Más részről, ha a nagy meleg folytán részben megolvadna is, még eme folyós állapotában se váljék a villamosságnak jó vezetőjévé. Egyike az e czélra legalkalmasabb anyagoknak az égetett mész, vízmentes calciumoxyd, melyet már Sainte-Claire-Deville és Debray is alkalmazott oxyhydrikus lánggal hevített platinaolvasztó készülékükénél. Tényleg ebből készültek Moissan-nak laboratoriumi kemenczéi is. E kemenczéknek fedele, noha csak három centiméter vastagságú mészlap és noha belső felülete működés közben az ív szomszédságában olvad és olyan folyékonynyá lesz mint a víz, igen csekély mennyiségben bocsátja át a meleget olyannyira, hogy a külső felületre bármikor minden veszély nélkül rátehetjük kezünket. A vezetés folytán beálló hőveszteség tehát csak minimalis értékű.

A szerkezet maga igen egyszerű. Az alsó rész mésztömbjének közepén mélyedés létezik, melybe a vegyi hatások szinhelyét alkotó széncsésze elhelyezhető. E csésze fölé kerül a volta-ív, melynek két szénpálczája a mésztömbbe vájt rovátokba helyezkedik. Az egészet a már említett egyszerű mészlap-fedél zárja.

A magnesia alkalmazása a mészénél kevésbé előnyös, mert nehezebben olvad ugyan a magnesia, de másrészről könnyebben áthevül és mihelyt izzóvá lesz, sugárzás folytán nagy hőveszteségeket okoz és egyszersmind a villamosságnak jó vezetőjévé válik. A mészcarbonát, például a márvány, sokkal megfelelőbb és gyak-



MOISSAN laboratoriumi villamos kemenczéje.



Villamos BESSEMER-eljárás.

ran alkalmaztatik is azon hátránya daczára, hogy kellemetlenül sok szénsav illanik el belőle, sőt annak egy része az izzó szénnel való érintkezés folytán előbb szénoxyddá redukálódik, a mi a kezelő-személyzetre nézve még kellemetlenebb. Kár, hogy az égetett mész nagyobb táblákban nehezen szerezhető és még nehezebben konserválható, mert különben nemcsak laboratoriumi, hanem ipari kemenczéknél is használható lenne. Utóbbiaknál kénytelenek vagyunk a nagy hőnek kitett részeket magnesia-téglákból állítani össze és utóbbiakat a sugárzás és hőtovavezetés csökkentése végett tűzálló téglákkal (chamotte) körülépiteni.

Nem czélunk e helyen a villamos kemenczének egyszerűsége daczára is létező és az ipari alkalmazásoknál magától értődőleg nagy fontosságú szerkezeti nehézségeire kiterjeszkedni. Semmikép sem meglepő, hogy oly hatalmas hőfokok keletkezésénél, mint a milyen a volta-ívben létesül, a tartósság és így a fentartási költségek értéke sok elővigyázatot igényelnek. Az erre vonatkozó kérdések ma már gyakorlatilag elég jól vannak megoldva és pár évi kifogástalan működés bizonyít ipari alkalmazhatóságuk mellett.

Jelen sorok azon chemiai elemek- és vegyületeknek felsorolására szorítkoznak, melyeknek előállítása csupán a villamos kemencze hőmérséklete mellett volt lehetséges. A legtűzállóbb oxydok sem képesek ellenállni a volta-ív redukáló hatásának és így oly elemeket tudunk ma tiszta állapotban nyerni, melyeket a chemia eddig csupán vegyületeik nyomán sejtett és valódi fizikai és chemiai tulajdonságaira nézve alig ismert. De még azon ritka elemeknek ismerete is, melyeket sóikból kisebb mennyiségben ugyan eddig is elő lehetett állítani, sokat nyert az által, hogy a villamos kemencze az előállítást nagy mennyiségben kényelmesen és olcsón és főleg teljesen tiszta állapotban megvalósíthatóvá teszi.

Példa erre az uranium. Peligot állította elő először 1842-ben chloridjából kalium segélyével és később 1886-ban Zimmermann ugyanazon halogén sóból natrium felhasználásával. Az ily módon csekély mennyiségben nyerhető elem azonban soha sem volt tiszta. Mindig tartalmazott néhány százaléknyi alkalikus fémet, továbbá vasat, a csészéből származó platinát és gyakran nitrogent is.

Moissan-nak sikerült az uraniumnitrat hevítése útján keletkező zöld oxydból magát a fémes elemet a villamos kemenczében kilogrammszámra előállitani és tulajdonságait kényelmesen megvizsgálni. Kivüle utóbbira Becquerel is vállalkozott, még pedig fényes sikerrel, a mennyiben vizsgálatai során felfedezte az uránsugarakat, azon közvetlenül nem látható, de fluoreskálást előidéző sugárzást, mely az uraniumból folyton megszakitás nélkül kiáramlik. Azóta Schmidt, német tanár kimutatta, hogy a thorium is ugyanily sugárzásnak szinhelye. Az uranium és thorium az összes elemek között a legnagyobb atomsúlylyal bír, a minek az atomrezgéssel kapcsolatban talán szerepe lehet a kérdéses tünemény jelentkezésénél. Másik például szolgálhat a chrom, ezen már Vanquelin által a mult század végén felfedezett fém, mely tiszta állapotban eddig egyáltalán nem volt ismeretes. Igen állandó oxydjából csak vassal való ötvözet alakjában és pedig csupán erős széntartalommal volt nyerhető. Moissan 1893-ban megmutatta, mily könnyű a villamos kemenczében a chromsesquioxydnak redukálása és azóta a tiszta chromfémnek gyártása igen egyszerű műveletté vált. Fizikai tulajdonságait utóbbi évben Hittorf, a hires német fizikus vette vizsgálat alá és megállapitotta azon különös, a légsav és passiv vas magatartására emlékeztető sajátságát, hogy tiszta fém állapotában edzés útján elektrikus oldási feszültségét megváltoztathatja és elektropositiv testből elektronegativvá lehet. Moissan szerint, már igen csekély széntartalom is megváltoztatja a chrom fizikai tulajdonságait, például oly keménynyé teszi e fémet, hogy az üveget is karczolja, holott a tiszta chrom erre nem képes, sőt kovácsolható és ráspolyozható. Hasonló magatartású a rokon molybden is, melyből néhány darabot bemutathatunk. A megmunkált felületek jól kivehetők rajtuk.

Nem kell bővebben kiemelnünk, mily fontos a fizikai, sőt chemiai tulajdonságok vizsgálatát is teljesen tiszta anyagokon végezni. A legcsekélyebb tisztátlanságnak, mint épen jeleztük, nagy befolyása lehet ama tulajdonságok megváltoztatására. Hiszen alig egy százaléknyi szén vagy idegen fém teljesen átalakítja a vasat avagy félszázaléknyi chromtartalom csaknem megduplázza a réznek mechanikai szilárdságát. A jól szerkesztett villamos kemencze megengedi, hogy teljesen tiszta termékekre tegyünk szert és így már ezáltal is megbecsülhetetlen szolgálatokat tesz a chemiának. Különösen beválik ez oly fémek és metalloidok előállításánál, melyek igen nehezen illók, tehát folyékony állapotban maradnak a kemencze alján, úgy hogy az oxygen- és nitrogennek rájuk való hatása elkerülhető. Ilyenek: a fémek közül a chromon és molybdenen kívül a wolfram (tungsten) és a hozzájuk közelálló metalloidok közül a titán és vanadium és végre a silicium és zirconium is. Négyüket és pedig a chromot, molybdent, titánt és vanadiumot Moissan tanár szivessége folytán itt bemutathatom.

Ezen elemeket többek között még egy más közös chemiai sajátság is kitünteti. Ugyanis mindannyian a szénnel oly kemény és állandó karbideket alkotnak, hogy azokat a víz alacsony hőmérséknél nem képes megtámadni. Lehet, hogy ezen karbidoknak chemiai és mechanikai szilárdságában keresendő ezen elemek gyakorlatilag is igen fontos azon tulajdonságának oka, hogy vashoz adagolva annak mechanikai ellenálló képességét sokszorosan növelik. Ezen nagy szilárdság folytán jutott eleinte a chromaczél, a wolframaczél és a titánaczél, ujabban pedig a vanadiumaczél nagy elterjedéshez, nevezetesen szerszámok, pánczélok és lövegek gyártásánál. Mindnyája között leginkább emeli az aczél szilárdságát a vanadium és pedig a növekedés kétszer akkora, mint a mennyit például a gyakran szintén e czélra alkalmazott nickelfémnek hozzáadása előidéz. Ma már a vanadium belépett a könnyebben megszerezhető fémek sorába. Újabban Középfrancziaországban, Drômemegyében akadtak nagy mennyiségű vanadiumtartalmú agyagra, mely körülbelül másfél százaléknyi vanadiumsavat zár magába. A Compagnie de Fives-Lille Albertville városa mellett berendezett vízerőre ezer lovas villamos telepet a vanadiumnak ezen agyagból való kiválasztása végett villamos kemenczék segélyével.

A vanadium különben nemcsak a vassal, hanem a rézzel és az aluminiummal is érdekes, szilárd ötvözeteket képez, ellenben az ezüsttel nem keveredik.

A fentebb említett hét elemnek karbidja, mely mint mondtuk, hideg víz által fel nem bontható, kristályos, át nem látszó, fémfényű szilárd vegyület. Mindnyája igen kemény, így pl. siliciumkarbid a korundot is megkarczolja. A siliciumkarbidnak két válfaját mutathatjuk be. Az egyik fekete színű, zölden fluoreskáló, szép kristályos test, a másik pedig, mely úgy látszik, a vastartalomtól gondosan lőn megtisztítva, zöldesszürke szinű, kissé áttetsző lemezes kristályokból áll.

A szén irányában való magatartás és a szénkarbidok tulajdonságai különben bizonyos osztályozását engedik meg a fémeknek és a hozzájuk közelebb álló metalloidoknak. Igy némely fém mint az arany, az ón és a bismut egyáltalán nem képes vegyületet alkotni a szénnel még a villamos kemenczében sem. A platinacsalád fémei folyós állapotban csekély mennyiségű szént elnyelnek, de megdermedéskor grafit alakjában azt ismét kiküszöbölik. Hasonló magatartású az ezüst is, melynek, ha folyékony állapotában szenet nyelt el, azon tulajdonsága is van, hogy dermedéskor térfogatát nagyobbítja, épúgy mint az öntött vas és a víz. A tiszta ezüstnél e tünemény nem észlelhető époly kevéssé mint a tiszta puha vasnál. Az aluminium szintén kiküszöböli a hig állapotában hozzá vegyitett szenet, ellenben a vörösréz kis mennyiségű széntartalmat megőrizhet hideg állapotában is, miáltal tulajdonságai, nevezetesen nyujthatósága alaposan megváltoznak.

A többi fémek, így a vascsaládhoz tartozók is szénnel határozott vegyületeket, karbidokat alkotnak és pedig egy részük, mint már említettük, igen állandó karbidokat, melyeket hideg vízzel felbontani nem lehet, a többiek pedig kevésbé állandó karbidokat. Utóbbiaknak ismét további osztályozása lehetséges, a szerint, a mint a vízzel való bontás eredménye hydrogen, mint a mangankarbidnál CMn_3 vagy pedig gázalakú hydrokarbid, úgymint acetylen az alkalikus fémek és földfémek karbidjainál, nevezetesen a nagy elterjedésnek örvendő calciumkarbidnál és methangáz az aluminiumkarbidnál stb. Lehet azonban a bontás eredménye folyékony hydrokarbid is, pl. petroleum avagy plane szilárd paraffinszerű hydrokarbid is, sőt gyakran mindkettőnek, sőt leggyakrabban mindhárom állapotú hydrokarbideknek complex keveréke.

Az első alkalikus karbidokat, a kaliumét is, a nátriumét is Berthelot állította elő 1866-ban kerülő utakon. A lithiumét a villamos kemenczében Moissan fedezte fel lithin-nek szénnel való kezelése folytán. A lithiumkarbidnak C_2Li_2 azon érdekes tulajdonsága van, hogy az összes karbidok közül a legtöbb acetylent szolgáltatja és pedig kilogrammonkint 587 litert, holott a calciumkarbidnek kilogrammja csupán 349 liter gázt ad elméletileg 0° C és 760 mm nyomásnál.

A földes fémek közül a baryumnak karbidját BaC_2 Maquenne és Travers vegyészek 1892-ben, a nagy hirre vergődött calciumkarbidot CaC_2 pedig egyidejűleg Willson amerikai vegyész és Moissan párisi tanár állították elő a villamos kemenczében. Utóbbi egyszersmind a strontiumkarbidot is. Mindhárom vegyület tiszta állapotban kristályos szerkezetű és vízzel leöntve tiszta acetylengázt fejleszt. Ellenben az aluminiumkarbid Al_4C_3 (Moissan), mely oly érzékeny a víz iránt, hogy a levegő nedvességétől is aluminiumporrá hull szét, valamint a rendkívül csekély fajsúlyú glucinium-karbid (Lebeau) hideg vízzel tiszta methangázt szolgáltatnak. Az aluminiumkarbid aranysárga szép lemezes jegeczeket alkot. A beforrasztott üvegcsőben bemutatott példányok szinüket szépen megőrizték, ellenben a nyitható üvegbe rejtett nagyobb darabokon a levegő nedvességének hatása világosan észlelhető. A szép sárga kristályokat a kemenczéből kikerülő tömegből higított sósavval történő mosás útján választották ki.

Másik beforrasztott üvegcsőben bemutatott fekete pikkelyes anyag a Moissan által nyert ceriumkarbid CeC_2, mely cerit-ásványból lőn előállítva. Ezen karbid főleg azért érdekes, mert hideg vízzel oly keveréket szolgáltat, melyben úgy szilárd, mint folyékony valamint gáznemű hydrokarbidok is foglaltatnak. Moissan pontosan meghatározta a keletkező gázok mennyiségét és azt találta, hogy az túlnyomóan, még pedig három negyedrészben acetylenből, csekély ethylenből és végre methanból alkotvák.

Még érdekesebb eredményeket szolgáltat az uraniumkarbid Ur_2C_3, mivel annak vízzel való kezelésénél a vegyült szén kétharmada petroleum alakjában jelentkezik és csupán egyharmada methan- és ethylengáz. Acetylen elenyésző csekély mennyiségben jelentkezik, ellenben aránylag sok hydrogen. Hasonló viszonyokat találunk az uraniumhoz közel álló thoriumelemnek karbidjánál C_2Th_2, valamint az yttriumkarbidnál YtC_2 és a lanthankarbidnál LaC_2, csupán a keletkező gázoknak százalékos mennyisége változik. Utóbbinál például nem keletkezik hydrogen és csekély menynyiségű ethylen, ellenben sok acetylen és meglehetős mennyiségű methangáz. Az yttriumkarbid felbontásánál már jelentkezik hydrogen is, sok acetylen és methan. Végre a thoriuménál több a hydrogen és ethylen és methan, ellenben kevesebb az acetylen. A számszerű viszonyokról következő táblázat világosíthat fel bennünket:

	Acetylen	Methan	Ethylen	Hydrogen
Ceriumkarbid:	75,5	20,27	4,23	0
Uraniumkarbid:	0,17	78,05	6,77	15,01
Lanthankarbid:	70,18	28,67	1,15	0
Yttriumkarbid:	71,7	19,0	4,8	4,5
Thoriumkarbid:	47,05	31,06	5,88	16,01

Mindeme ritka fémeknek karbidjai azonkívül folyékony és szilárd hydrokarbidokat is szolgáltatnak, a mi azon feltevéshez vezette MOISSAN-t, hogy a petroleumforrások keletkezését a Föld méhében visszavezesse a Föld őskorában eredetileg létezett karbidoknak felbomlására vízzel való érintkezés folytán. Ez különben nem zárná ki egyes organikus eredetű petroleumforrásnak létezését.

A vas metallurgiája szempontjából érdekes volt megállapitani, vajjon a vas képez-e határozott alkatú kristályos karbidokat a szénnel. Az első idevágó kisérletek eredménytelenek maradtak, míg végre MOISSAN-nak sikerült a villamos kemenczében körülbelül 3500° Celsiusra hevített széntartalmú öntöttvasból hirtelen lehűtés által kristályos szerkezetű vaskarbidot teremteni. Az eredmény beforrasztott üvegcsőben szintén bemutattatott. Ezen eljárás emlékeztet különben arra, melylyel ugyancsak MOISSAN az öntött vasban levő grafitot apró gyémántkristályokká lőn képes átalakítani. Ugyanis a villamos kemenczében igen magas hőfokra emelt öntött vastömeget hirtelen behullatta megolvasztott ólomba. Az ily módon létesített relativ lehülés oly erős összehúzódást vont maga után az öntött vas tömegében, hogy a nagy nyomás és erős lehülés következtében a grafit gyémántkristályokká alakult át.

A vas magatartása a villamos kemencze hőjénél, a készüléknek egy új, igen érdekes alkalmazását teszi lehetővé, melyet villamos Bessemer-eljárásnak nevezhetünk el. Képzeljük ugyanis, hogy a nyersvas, mely rendszerint két-egész hat százalék vegyült és nem vegyült szénen kivül bizonyos mennyiségű ként, fosfort és siliciumot tartalmaz, izzó folyékony állapotban a villamos kemencze elektródusai között vékony sugárban meghatározott sebességgel átfolyik. Az áram nagy melege az átfolyás pillanatában annyira felhevíti az amúgy is izzó folyadékot, hogy csekély levegőnek befuvása is már elég arra, hogy a könnyen oxydálódó siliciumot, valamint a fosfort, ként és végre a szénnek is nagy részét elvonja a vastól. Ez annál könnyebben történhetik, minthogy az izzó folyadék azon pillanatban, mikor az áramkörnek részét alkotja, a nagy áramintenzitás folytán erős elektrodynamikus szóró hatásnak, valóságos mágneses «kifúvás»-nak van kitéve és így finoman permetező eső alakjában távozik az elektródusoktól. Ha hideg edényben fogjuk fel ezen esőt, úgy annak minden cseppje megdermed és a haladás sebességéhez képest finomabb vagy durvább serétszerű tömeget, sőt lisztfinomságú port is nyerhetünk; ebből a két üvegbe zárt minta a felolvasónak szintén rendelkezésére volt. (L. 27. lap.)

Ha azonban hevített edénynek forró légkörében fogjuk fel ezen vasesőt, úgy az folyadék alakjában terül el az edény fenekén és onnét mintába önthető. Mivel pedig az így kezelt vas az idegen anyagoktól csaknem teljesen megtisztult, a nyers vasból ily módon kitűnő szerszámaczélt nyertünk. A szemlére kitett minta ugyanazon nyersvasból készült, a melyből a finomabb vassrét, és pedig a Krupp-féle czég által rendelkezésre bocsátott specziális nyersvasból. Felesleges külön kiemelnünk, hogy az ekként finomított aczélhoz folyós állapotában egyéb czélszerű anyagnak hozzátétele minden nehézség nélkül mehet végbe, például épúgy, mint a Bessemer-eljárásnál mangannak hozzáadása a végből, hogy az esetleg túlterjedt hevítés folytán részben oxydálódó vasat ismét teljesen redukálja. Ezen káros oxydáczió a villamos kemenczében a folyási sebességnek kellő megválasztása mellett egyáltalán nem fordul elő, mint az a serétgolyócskák oxydmentes felületéből is megállapítható. Különben is a vas oxydacziójának felel meg a legkisebb képződési meleg és így az marad utolsónak a nyersvas egyéb elemének oxydálása mögött.

Előnye ezen eljárásnak, melyet Gérard franczia mérnök kezdeményezésére e sorok írója a Fives-Lille-társaság megbizásából beható tanulmányozásnak vetett alá, a közönséges Bessemer-eljárással szemben az, hogy a sokszorosan magasabb hőfok igen kis térre szorítható. Ennélfogva a konvertálás igen gyorsan és kényelmesen és kis mennyiségekre alkalmazva történhetik. Olyan nagy és költséges szerkezet, mint a Bessemer-körtéé, egészen elkerülhető. A nyert aczél kis mennyiségnél is eléggé folyékony marad ahhoz, hogy jól mintába önthető legyen, míg a Bessemer-eljárásnál ennek elérése végett ferrosiliciumot vagyunk kénytelenek a konvertálandó tömeghez hozzáadni, hogy a silicium oxydálásából eredő meleg kellő folyós állapotban tartsa a körte tartalmát. Olcsó vizierő felhasználásánál csaknem ötszörte olcsóbb is e villamos eljárás a közönséges ma alkalmazott aczélgyártásnál. Ugyanis lóerőnkint és óránkint tíz kilogramm nyersvasat vagyunk képesek finom aczéllá átváltoztatni.

A kisérletek eddig Párisban 25 lovas kisérleti telepen eszközöltettek és csak most épül egy nagyobb, 600 lovas vizierőre berendezett telep eme villamos bessemerelésnek iparszerű kipróbálására. Felemlíthetem ezúttal, hogy e telepnek egy része még egy másik elektrochemiai vasterméknek, sok, mintegy harmincz százalék siliciumot tartalmazó vasötvözetnek gyártására is fog szolgálni, melyről néhány szóval megemlékezhetünk itt. Ha ugyanis villamos kemenczében valamely könnyen redukálható vasércz, teszem vaskarbonát vagy vasrozsda vagy kovatartalommal biró homokkal és szénnel keverve poralakban a volta-ív melegének kitétetik, úgy rövid idő alatt egy ezüstfényű bronz-szerű vegyület képződik. Ezen vegyületnek több érdekes tulajdonsága van. Mindenekelőtt a levegőnek igen jól ellenáll és pedig úgy a száraz, mint nedves levegőnek. Más részről kitűnően olvasztható és önthető. Ennélfogva műtárgyak készítésére felette alkalmas. De van egy még érdekesebb tulajdonsága, melyet bizonyára nagy mennyiségű siliciumtartalmának köszön. Ugyanis poralakban épúgy, mint az aluminiumpor kellő elővigyázat mellett meggyújtható és oly nagy melegfejlesztés mellett oxydálódik, hogy — hasonló módon, mint a GOLDSCHMIDT-féle eljárásnál az aluminiumpor, — vasdarabok hegesztésére, szögecsek izzítására egyszerű módon alkalmazható. Olcsó előállítási ára e czélra az aluminiumnál alkalmasabbá teszi. Tudtommal Amerikában, a Willson-féle társaságnál is folynak ez irányban a ferrosiliciummal kisérletek.

Épúgy mint a vassal, a chrommal és egyéb fémmel mint a mangan-, nickel-, kobalt-, platina- és rézzel is képezhet a silicium direkt vegyületet, ellenben az ezüsttel csak folyós állapotban marad egyesülve, holott megdermedésnél abból teljesen kiválik, úgy hogy a művelet után tiszta ezüst, kristályos silicium és kristályos siliciumkarbid marad hátra. Mint már említettük, az ezüst a szén esetében is kivételt alkot, a mennyiben ezüstkarbidot sem vagyunk képesek előállítani. Annál figyelemreméltóbb tehát, hogy a bór, mely pedig a szén- és siliciummal rokon magaviseletű elem, az ezüsttel amorph ezüstboridot szolgáltat, melynek példányát beforrasztott üvegcsében bemutathatjuk. Kristályos alakban még nem sikerült MOISSAN-nak a villamos kemencze legmagasabb hőjénél sem előállítani e vegyületet, ellenben úgy a vasboridot, mint az itt felmutatható apró szép tűs kristályokból álló kobaltboridot és a hasonló nickelboridot szép kristályos tömegben már 1200° C.-nál is képes volt megvalósitani.

Utolsónak felemlíthetjük a bórnak még két vegyületét, melyek ismeretéhez szintén csak a villamos kemencze révén jutottunk el. Az egyik a bórsilicium, a másik az előadás alkalmával szintén bemutatott bórkarbid. Főleg az utóbbi, apró kristályos porszerű anyag, érdemel kiemelést, a mennyiben az eddig ismert testek között a legkeményebb. Ugyanis még a gyémántot is erősen karczolja.

Összegezve a mondottakat, hangsulyozhatjuk, hogy a villamos kemencze és annak rendkívüli hőmérséklete segitségével számos chemiai problema lőn megoldhatóvá, melyek addig oldhatatlanoknak tüntek fel. Mindenekelőtt lehetővé tette a szén különféle változatainak, valamint szervezetlen vegyületeinek, a karbidoknak előállitását és tanulmányozását. Így MOISSAN megállapithatta, hogy a szén, valamint különben a bór is szilárd állapotból gáznemüvé válhatik a nélkül, hogy cseppfolyós állapoton menne keresztül, ha a művelet közönséges alacsony nyomás mellett megy végbe, míg igen erélyes nagy nyomás mellett a szén cseppfolyóssá válhatik és mint fekete vagy esetleg átlátszó gyémánt kristályosodhatik.

Más oldalról a villamos kemenczének nagy hőfoka, melyet VIOLLE, beható kisérletekre támaszkodva, körülbelül 4000° C-ra becsül, lehetővé tette addig teljesen tűzálló oxydoknak elpárologtatását és végre redukálását is színfémre vagy metalloidra. Így a kova, valamint a zirkon párákká alakulhat és lehűtve poralakban lecsapódhatik, mint a két bemutatott üvegcsében látható por tanusítja. A mész, a magnésia és a többi ellenállóképes oxydnak, valamint az őket alkotó fémeknek egész sorozata cseppfolyósitható, sőt gázalakba hozható és a mi még fontosabb, az előbbi állapotban kikristályosítható. Sőt e módszer számos drágakőnek, mint teszem az aluminiumoxydból készíthető rubinnak vagy uránsókkal előállítható szép kék saphirnak és zöldessárga topáznak synthesiséhez vezetett. Igaz ugyan, hogy e mesterséges előállítás eddig csupán igen apró, noha mikroskóp nélkül is igen jól kivehető drágakőkristályokat szolgáltatott, de nem valószínűtlen, hogy e kristályok táplálásának érdekes problemája is meg fog előbb-utóbb oldathatni a villamos kemencze révén.

Ekként a chemiának eddig zárt terei nyiltak meg a kutatók előtt és azoknak kiaknázása hosszú időre fogja czélját képezni a törekvők és munkálkodók mindinkább növekedő seregének, nem is szólva azon új szempontokról, melyeket a nyert új adatok a chemián kívül egyéb tudományszakokban is, nevezetesen a geologiában például a Föld kérgének izzó állapotában végbement tünemények felderítése körül teremteni képesek.

Korda Dezső.

A TESTEK HALMAZÁLLAPOTAIRÓL.

(Harmadik közlemény.)

A testek physikai tulajdonságainak viselkedése a három halmazállapotban.

17. §. *A hőokozta térfogatváltozás. A régibb kutatások.*

A testek, ha velük meleget közlünk, megváltoztatják térfogatukat; a kisérleti eljárások légnemű és folyékony testeknél közvetlen a térfogatváltozást figyelik meg, míg a szilárd testeknél rendszerint a lineáris változást határozzák meg. Ennek képlete:

$$l_t = l_0(1 + a_l t)$$

a hol l_t és l_0 a hosszúság $t°$, illetve $0°$-nál, a_l a kiterjedési koefficziens; innen a térfogatbeli tágulás:

$$v_t = l_t^3 = l_0^3(1+a_l t)^3 = v_0(1+a_k t);$$

a harmadik hatványt kiszámítva s t magasabbrendű tagjait elhagyva, az:

$$a_k = 3a_l$$

összefüggést kapjuk.

A légnemű testek hőokozta tágulásáról az első kisérletek igen változatos eredményeket adtak. Morveau és Duvernois szerint a kiterjedési koefficziens a magasabb hőfoknál gyorsan emelkedik, Roy szerint lassan csökken, Schmidt kisérletei pedig azt mutatták, hogy a kiterjedés legalább közelítőleg egyenletes, a kiterjedési koefficziens azonban minden testnél más. Ugyancsak Schmidt azt találta, hogy a nedves levegő erősebben terjed ki, mint a száraz, a mit Luz kisérletei is megerősítettek.[1] Jelentékeny ingadozásokat találunk az egyes légnemek kiterjedési koefficzienseinek értékeiben; levegőnél az értékek többnyire 0·3 és 0·5 között vannak, de Pristley a koefficzienst 0·9375-nek találta, Morveau pedig 0·9368-nak; Schmidt szerint a hydrogén kiterjedési koefficzíense 0·4400, a széndioxydé 0·4352 s a nitrogéné 0·4787.[2]

Egységesebb képet e téren Dalton-nak és még inkább Gay-Lussac-nak kisérletei hoztak létre. Dalton[3] direkte észlelte a megvizsgált légnemek kiterjedését s azt találta, hogy a kiterjedés menete mindegyik légnemnél megegyezik és pedig a kiterjedés geometriai arányban nő, ha a hőmérséklet arithmetikai arányban nő. Nagyobb pontosságúak Gay-Lussac kisérletei,[4] melyeknek végeredményéül kimondja, hogy *az összes gázok — nem tekintve nedvességüket és sűrűségüket — és a gőzök egyenletesen terjednek ki s a kiterjedési koefficziens a hőmérő szilárd pontjai közt 0·00375.*

Úgy látszott, hogy Gay-Lussac kisérleteivel a vizsgálatok e téren bizonyos befejezettséget nyertek. Harminczöt év mulva azonban megjelent Rudberg-től egy értekezés, mely a tágulási koefficzíensre más értéket ad; ezen értekezés azután kiinduló pontja lett más, fontos kisérletsorozatoknak, melyek ismét jelentékenyen fejlesztették ismereteinket. Nagyon tanulságos itt a fejlődés egymásutánja.

Rudberg két, lényegileg különböző eljárással végezte kisérleteit.[5] Első kisérleténél a lehülésnél fellépő térfogatcsökkenést határozta meg, miközben a nyomás állandó volt; másik eljárása az állandó térfogatnál fellépő nyomásváltozást mérte meg; kisérleti anyagul mindkét esetben a száraz levegőt használta. Kétféle kisérletének eredménye az volt, hogy *a száraz levegő kiterjedési koeffiçziense*

---

[1] Gehler, Phys. Wörterb. I, pag. 629, 630.

[2] Heller, A phys. tört. I, pag. 499.

[3] Mem. of Manch. V. 2, pag. 595; 1802. — Ostwald, Klassiker Nr. 44, pag. 25.

[4] Ann. ch. XLVI, pag. 137; 1802. — Ostwald, Klassiker Nr. 44, pag. 3.

[5] Pogg. Ann. XLI, pag. 271, 558; 1837. XLIV, pag. 119; 138. — Ostwald, Klassiker Nr. 44, pag. 41, 62.

0° és 100° C. közt nem 0·00375, hanem *0·00364 és 0·00365 között van*. Meg is mutatta, hogy Gay-Lussac azért kapott nagyobb értékeket, mert a levegőt nem szárította meg eléggé.

Nem sokkal Rudberg-é után jelent meg Magnus értekezése;* eljárása lényegben megegyezett Rudberg második kisérleti eljárásával, de nagyobb volt a pontossága. A száraz levegőn kívül kiterjeszkedett a hydrogénre, széndioxydra és kéndioxydra; a kiterjedési koefficziensek középértékei:

levegőnél:	0·00366508;	széndioxydnál:	0·00369087;
hydrogénnél:	0·00365659;	kéndioxydnál:	0·00385618.

Az eredmények azon nagyfontosságú következtetést adták, hogy *a különböző gázok kiterjedési koefficziensei nem egyenlőek*.

Rudberg kisérletei ösztönözték a kérdés megvizsgálására Regnault-t is;** kisérleteit két főszempont szerint oszthatjuk fel: egyik rész a gázok kiterjedési koefficzienseinek meghatározásával foglalkozik, másik rész a kiterjedési koeffiziens és a nyomás összefüggésével.

Első feladat a levegő kiterjedési koefficziensének újabb meghatározása volt, mivel Gay-Lussac értékének helyessége kétségessé vált. Többféle kisérleti eljárást használt, melyek részben Rudberg methodusainak tökéletesítései s egymástól a következőkben különböznek: 1. térfogat és nyomás változó; 2. a térfogat állandó; 3. a nyomás állandó. Az α-ra nyert értékek a következők:

1. eljárás szerint: 0·0036623;
2. « « 0·0036633; 0·0036679; 0·0036650;
3. « « 0·0036706.

Két következtetés vonható e számokból; egyik az, hogy valamennyi α nagyobb Rudberg értékénél; a másik pedig, a mi lényeges előhaladást mutat, hogy *a levegő kiterjedési koefficziense*

* Pogg. Ann. LV, pag. 1; 1842. — Ostwald, Klassiker Nr. 44, pag. 67.
** Pogg. Ann. LV, pag. 391, 557; 1842. — Ann. ch. ph. (3) IV., pag. 5; V., pag. 52; 1842. — Ostwald, Klassiker Nr. 44, pag. 80.

különböző, a mint állandó térfogatnál (2. eljárás), *vagy állandó nyomásnál* (3. eljárás) *mérjük meg.* Az elnevezésben úgy különböztetjük meg a két esetet, hogy az állandó nyomásnál mutatkozó koefficzienst *kiterjedési koefficziens*nek (a_v), az állandó térfogatnál mutatkozót *nyomási koefficziens*nek (a_p) nevezzük.

A kiterjedés és nyomás összefüggésének vizsgálatánál pedig azon eredményt mutatta ki Regnault, hogy *mind* a_p, *mind* a_v *növekszik a nyomás növekedésével.*

Regnault azután kiterjesztette vizsgálatait más gázokra is; ezen eredményeket is összefoglalva, megláthatjuk ismereteink haladását. *A gázoknak kétféle kiterjedési koeffiziensük van: állandó nyomás mellett* (a_v) *és állandó térfogat mellett* (a_p), *mely értékek az egyes gázoknál különbözők. Egy ugyanazon gáznál is* a_v *és* a_p *különbözők; a hydrogénnél* $a_v < a_p$, *a többi gáznál* $a_v > a_p$. *A nyomás növekedésével* a_v *és* a_p *nőnek, csak a hydrogénnél nem volt növekedés kimutatható.*

Regnault kiterjedési koeffiziensei a légköri nyomás alatt a következők:

	a_p	a_v
Nitrogén	0·0036682	—
Hydrogén	36678	0·0036613
Szénoxyd	36667	36688
Széndioxyd	36896	37099
Cyan	36821	38767
Nitrogénoxydul	36763	37195
Kéndioxyd	36696	39028
Sósav	36812	—
Levegő	36654	36706.

Gay-Lussac törvénye tehát lépésenkint minden pontjában hiányosnak bizonyult, a mi azonban fontosságától még sem fosztja meg: megmaradt ideális törvénynek, melyet teljes pontossággal csak ideális gáz követ, mint az a Boyle-Mariotte törvényről is kitűnt.

Még csak megjegyezzük, hogy a hydrogén itt is különös viselkedést mutat a többi gázzal szemben (l. feljebb u. e. lap).

A folyékony és szilárd testeknél az első kutatások egyenletes kiterjedésről szólnak; a pontosabb vizsgálatok itt is körülbelül GAY-LUSSAC idejében kezdődtek.

A folyékony testek közül, könnyen érthető okokból, a higany és a víz szolgáltattak sok kutatásra alkalmat. A higanyra DULONG és PETIT mutatták ki először, hogy a levegővel nem egyenlően terjed ki.[1] Számadataikat később REGNAULT megjavította;[2] míg ugyanis DULONG és PETIT szerint a két anyag kiterjedésének menete 100°-ig megegyezik, azután a higany előresiet, REGNAULT szerint a megegyezés majdnem 250°-ig terjed. REGNAULT a higany kiterjedésére empirikus egyenletet is adott, melyet azután többen próbálták megjavítani (BOSSCHA, WÜLLNER, ROSENBERG); a kiterjedés törvényét azonban ezek sem világosították fel jobban s ismeretünk ezek után is lényegben csak annyi, hogy *a kiterjedési koefficziens a hőmérséklettel együtt növekszik.*

Itt említjük meg, hogy DULONG és PETIT vizsgálatai megdöntötték DALTON-nak a homogén folyadékokra adott s a gázokéval megegyező fogalmazású törvényét (39. lap).

A víznél s a többi anyagoknál sem jutottak a kisérletek tovább egy-egy empirikus egyenletnél, melyek csak azt fejezik ki, hogy *a kiterjedési koefficziens nő a hőmérséklettel együtt.* A víznél hozzálépett ehhez a sűrűségmaximum felismerése.

A szilárd testeknél fémek esetében LAVOISIER és LAPLACE a higanyéval megegyező kiterjedést kaptak;[3] de DULONG és PETIT itt is kimutatták, hogy *a kiterjedési koefficziens nő a hőmérséklettel együtt.*[4] Közlött számadataikból ehhez még azt a következtetést kapcsolhatjuk hozzá, hogy *azon testeknél, melyeknek olvadáspontja alacsonyabb, nagyobb a kiterjedési koefficziensnek a hőmérséklettel való változása;* a melyeknél az olvadáspont magasabb, azok kevésbbé térnek el az egyenletes kiterjedéstől.

---

[1] SCHWEIGGER, Journ. XXV, pag. 304; 1819.

[2] Ann. ch. ph. (3) V, pag. 83; 1842. — OSTWALD, Klassiker Nr. 44, pag. 165.

[3] 1782-ben BIOT, Traité de Phys. I, pag. 151.

[4] SCHWEIGGER, Journ. XXV, pag. 304; 1819.

18. §. *A hőokozta térfogatváltozás. Az újabb kutatások.*

Főszempontjaink következők lesznek: mit derítettek ki az újabb kutatások a kiterjedésnek a hőmérséklettel s a nyomással való változására nézve; minő viselkedést tapasztalunk a kiterjedésben a halmazállapotváltozásoknál?

Az első kérdésnél *a légnemű testek* körében mindjárt Andrews vizsgálatait kell említeni,[1] ki a szénsavnál a_v és a_p értékeit állandó hőmérsékleti közökben vizsgálta meg. Kisérletének eredményei szerint a_v és a_p a nyomás növekedésével emelkednek, de *a hőmérséklet emelkedésével csökkennek;* ez az utóbbi eredmény részben ellentmond Regnault kisérleteinek,[2] ki gázhőmérők meneteinek összehasonlításából azt következtette, hogy a_p a hydrogénnél és széndioxydnál a hőmérséklettől független s csak a kéndioxydnál csökken a hőmérséklet emelkedésével. Andrews továbbá azon eredményre jutott, hogy *a_v-nek egy maximális értéke van,* melynek elérése után igen hirtelen csökken; a_p-nél nem nyilvánult ily maximális érték.

Andrews eredményeit megerősítették Amagat kutatásai, ki különben már előbb észlelte a_v-nek a hőmérséklettel való változását a széndioxydnál és kéndioxydnál;[3] két, teljesen egyenlő gázthermometert, az egyiket levegővel, a másikat az illető gázzal megtöltve, egyidőben megfigyelt. Azt találta, hogy a mint a kiterjedési koefficziensek csökkennek, úgy csökken a Boyle-Mariotte törvénytől való eltérés is és azt következtette, hogy a gázok kiterjedési koefficziensei a hőmérséklet emelkedésével egyazon értékhez közelednek, melyet elérnének, ha ezen törvényt pontosan követnék. Később nagyobb határokra terjesztette ki kisérleteit: 320 atm. nyomásig és 0°—100° hőmérsékletig.[4] A megvizsgált széndioxydnál és æthylénnél a_v a nyomás emelkedésével egy maximumig

---

[1] Phil. Mag. (5) III, pag. 63; 1876.
[2] Mém. de l'inst. XXI, pag. 185; 1847.
[3] C. R. LXXVII, pag. 183; 1871.
[4] Ann. ch. ph. (5) XXII, pag. 353; 1881.

nőtt, azontúl csökkent. Megvizsgálta a hydrogén viselkedését is és itt eltérő viszonyokat talált. Erre vonatkozó számadatai:

p atm.	$\alpha_{17-60°}$ [1]	$\alpha_{60-100°}$ [2]
40	0·0033	0·0029
100	33	28
180	30	27
260	30	25
320	28	24

Határozottan látszik, hogy a_v *a nyomás emelkedésével csökken;* úgy látszik, hogy a hőmérséklet emelkedésével is csökkenés áll be, ennek kimondására azonban kevés a rendelkezésre álló számadat.

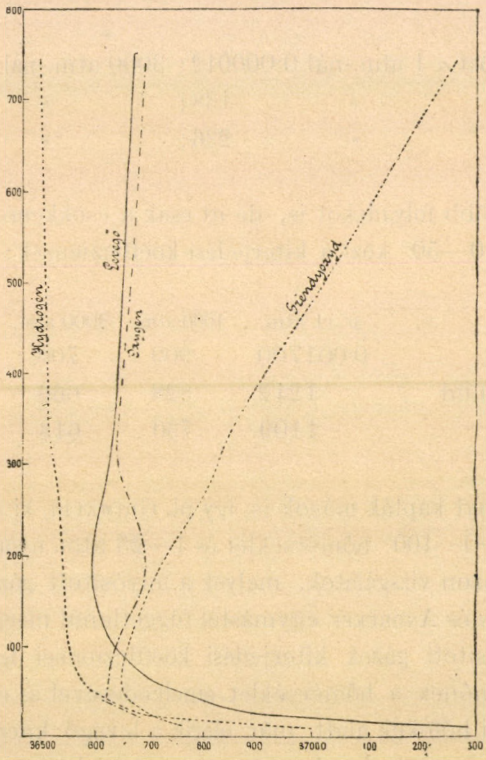
Igen érdekesen egészíti ki ezen eredményeket Melander vizsgálata a légkörinél alacsonyabb nyomások mellett.[3] A számadatai alapján konstruált graphikonban (25. ábra) az abscissák a nyomási koefficziensek 10^8-szorosai, az ordináták a nyomások mm-ekben. A levegő, oxygén és széndioxyd görbéinek menete: erős csökkenés a nyomási koefficziensben, azután kis növekedés, utána ismét csökkenés egy minimumig s ezután növekedés; a görbéknek tehát három fordulópontjuk van, melyek közül leghatározottabban a legutóbb említett jelentkezik. A hydrogénnél a nyomási koefficziens kezdettől fogva növekszik, de itt is mutatkozik két pont, melynél a növekedés nagyobbodik, melyek közül itt is az alacsonyabb nyomás mellett jelentkező a határozottabb. Ezen határozottabb fordulópontoknak megfelelő nyomások pl.: széndioxydnál 50 mm, oxygénnél 40 mm, levegőnél 170 mm, hydrogénnél 110 mm. A változás az első fordulópont előtt és az utolsó után meglehetős egyenletességgel történik.

A hydrogén kivételével tehát, a gázoknál a_p és a_v a hőmérséklet emelkedésével csökkennek, a nyomás emelkedésével nőnek; a nyomással való változásnál a_v-nek egy maximális értéke van,

---

[1] Egység a térfogat 17°-nál.
[2] Egység a térfogat 60°-nál.
[3] Wied. Ann. XLVII, pag. 135; 1892.

melyen túl csökken, a_p-nek egy minimális értéke, melyen túl növekszik. A hydrogénnél úgy látszik, mindkét koefficziens csökken, úgy a nyomásnak, mint a hőmérsékletnek is emelkedésével. A nyomással való változásnál tehát mindkét koefficziensnél van egy-egy pont, melyen kívül a koefficziensek — a hydrogénéit is beleértve — mind egyenlően viselkednek.



25. ábra.

A nyomásnak a hőokozta térfogatváltozásra való befolyását *a folyékony testeknél* is észlelték. Itt különösen Amagat kisérletei adtak sok felvilágosítást. Igen érdekes eredményre jutott a *víz* megvizsgálásánál.* Ha a nyomás állandó maradt, a kiterjedési

* C. R. CXVI, pag. 779; 1893.

koefficziens nőtt a hőmérséklettel; ha a nyomás változott, alacsony hőmérsékleteknél a kiterjedési koefficziens nőtt a nyomással együtt, 50—60° körül változatlan maradt, ezen hőmérsékleten felül pedig csökkent. A víz kiterjedési koefficziensének tehát egy maximális értéke mutatkozott, a mely nagy valószínűség szerint annál alacsonyabb hőfoknál állna be, minél nagyobb a nyomás. Íme néhány számérték:

0—10°	közt α	1 atm.-nál 0·000012;	3000 atm.-nál	0·000383
10—20°	«	138;	«	415
20—30°	«	236;	«	413.

Megvizsgált több folyadékot is, de itt csak a csökkenést tudta észlelni.[1] Így pl. 0—50° közt a kiterjedési koefficziensek:

	p=1 atm.	1000 atm.	2000 atm.	3000 atm.
æther	0·001700	909	700	558
széndisulfid ...	1212	828	666	581
alkohol	1109	730	613	524.

Ezen eredményt kapták mások is, így pl. Grimaldi, ki a kénæthert vizsgálta meg 0—100° hőmérséklet és 1—25 atm. nyomás között.[2]

Fontosak azon vizsgálatok, melyek a folyósított gázokra vonatkoznak. Drion és Andréeff egymástól függetlenül megállapították, hogy a folyósított gázok kiterjedési koefficziensei igen nagyok, igen gyorsan nőnek a hőmérséklet emelkedésével és egyesek mélyen elgőzítési hőfokuk alatt már elérik a levegő kiterjedési koefficziensének nagyságát. Így Andréeff szerint[3] a közepes kiterjedési koefficziensek:

---

[1] C. R. CV, pag. 1120; 1887.
[2] Journ. phys. (2) V, pag. 29; 1887.
[3] Ann. ch. ph. (3) LVI, pag. 317; 1859.

	kén-dioxyd	ammo-niak	szén-dioxyd	nitrogén-oxyd
—10° és — 5° közt	0·00190	0·00190	0·00475	—
— 5 « 0 «	194	200	492	0·00428
0 « + 5 «	198	210	540	422
5 « 10 «	202	220	629	484
10 « 15 «	206	230	769	656
15 « 20 «	210	240	975	872
20 « 25 «	215		1277	
25 « 30 «	220			
30 « 35 «	225			
35 « 40 «	230			

Ezen körülmény megvilágitására talán felhozhatjuk Amagat említett eredményeit (46. lap). A halmazállapotváltozáshoz bizonyos nyomás és hőmérséklet szükségesek; másrészt a nyomás növekedésével a folyadékok kiterjedési koefficziensei csökkennek. Ezen folyadékokat is magasabb nyomásoknak vetve alá, a kiterjedési koefficziensekre kisebb értékeket kapnánk s valószínűleg a kritikus hőmérséklet és nyomás felé közeledve, ezen értékek is közelednének azokhoz, melyekkel az illető testek légnemű állapotban bírnak. Döntő kisérletről még nem szólhatunk s így csak utalunk a kérdés nagy fontosságára.

*A szilárd testek*nél Dahlander végzett fontos kutatásokat a kiterjedés és nyomás, illetőleg feszültség összefüggésének felderítése végett.* Fémdrótok kiterjedését vizsgálta meg különböző megterhelés mellett és 15—100° hőmérséklet között. Azt találta, hogy a feszültség növekedésével a tágulási koefficziens is növekszik; ezen növekvést a rugalmassági koeffìcziens csökkenésének tulajdonítja. A kiterjedés növekedését találta Bottomley is;** állandó meghosszabbodást is észlelt, mely nagyobb volt az erősebben megterhelt fémdrótokban.

Áttérünk a másik kérdésre: minő változás jelentkezik a kiter-

* Pogg. Ann. CXLV, pag. 147; 1872.

** Beibl. XII, pag. 636; 1888.

jedésben, ha a test a halmazállapotváltozáshoz közeledik? A kérdést először HERWIG vizsgálta meg[1] 8—69·9° hőmérsékleti intervallumban az alkohol, chloroform, széndisulfid, æther, víz, æthylbromid gőzeivel. Az eredmény az volt, hogy a míg a gőz telített volt, a GAY-LUSSAC-féle törvény nem volt érvényes; a mint a gőz nem telített lett, bizonyos határtól kezdve nagy pontossággal követte a törvényt.

Nagyobb határok közt foglalkozott a kérdéssel BATTELLI, ki az æthergőz magatartását —28·41°-tól +206·5°-ig, az alkoholgőzét —16°-tól +240°-ig vizsgálta.[2] Idetartozó eredményei szerint a_v a hőmérséklet emelkedésével csökken és pedig annál gyorsabban, minél jobban közeledik a gőz a telítettséghez. Ezen változás sebessége annál nagyobb, minél magasabb a hőmérséklet. Mivel az æther kritikus hőmérséklete, BATTELLI szerint, +197°, az alkoholé +241·4°, ezen körülmény arra látszik mutatni, hogy a kiterjedési koefficziens változása növekedik a kritikus hőmérséklethez való közeledéskor.

Igen kiterjedtek WITKOWSKI-nak a levegő kiterjedési koefficzienseire vonatkozó vizsgálatai, melyek épen ezért legalkalmasabbak arra, hogy rajtuk a viszonyokat áttekinthessük.[3] REGNAULT-nak egyik eljárását használta: két, ismert térfogatú üvegedényt, melyek csapok által egymással összeköttetésben voltak, egyazon erősen komprimált levegőt tartalmazó reservoirból megtöltött; egyik edény hőmérséklete állandó maradt, a másiké változott; a nyomás kiegyenlítődése után az összeköttetést megszakította s az edényeket két ismert térfogatú endiometerrel kötötte össze; itt történt a gázmennyiségek mérése; a hőmérsékleteket hydrogénfokokra redukálta. Kisérleti számadataiból szerkesztettük a mellékelt graphikont (26. ábra), mely a_v-nek a nyomással való összefüggését tünteti föl az egyes hőmérsékletek mentén. Az abscissák a kiterjedési koefficziensek 10^6-szorosai, az ordináták a nyomások atm.-ban.

---

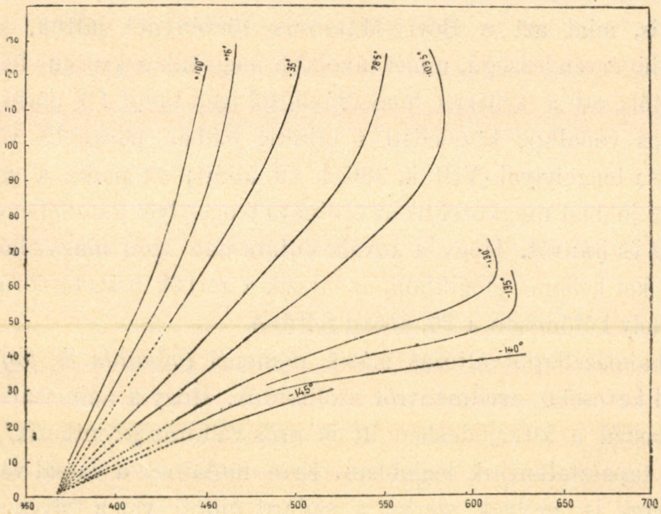
[1] Pogg. Ann. CXXXVII, pag. 15, 592; 1869.

[2] Journ. phys. (2) X, pag. 132, 135; 1891. — Ann. ch. ph. (7) V, pag. 256; 1895.

[3] Beibl. XII, pag. 176; 1891.

A graphikonból a régibb eredmények közül megerősítve látszik, hogy a_v egy bizonyos maximumig nő, azután csökken; továbbá a különböző isothermák ugyanegy pontból látszanak kiindulni, mely pont koordinátái körülbelül $p = 1, 10^6 . a = 367$; ez megegyezik Amagat hypothesisével (43. lap).

A kritikus hőfok (—142° C.) körül az eltérés a Gay-Lussac-féle törvénytől igen nagy; innen távozva, az eltérés csökken s jelentkez-



26. ábra.

nek a maximumok. Ezen maximumok a hőmérséklet emelkedésével magasabb nyomások felé huzódnak, a mihez analog viszonyt láttunk PV minimumainál (VIII. k. 385. lap). Witkowski szerint a_v maximumainak és pv minimumainak nyomásai ugyanazok; ez azonban —35°-nál magasabb hőmérsékleteknél közelítőleg sem érvényes. A kritikus hőmérséklettől távozva, az isothermák mindig meredekebbek; a görbék —142° körül először konkavok, azután konvexek, magasabb hőmérsékleteknél a konkavitás eltűnik s a kritikus hőmérséklettől igen távol már a konvexitás is alig látszik: a görbék egyenes vonalhoz közelednek, a mely eset a hydrogénnél igen nagy közelitésben megvalósul. Ez azon eset volna, mikor a_v a nyomással együtt arányosan változik.

A hőmérséklettel való összefüggésre nézve, Witkowski számadataiból az tűnik ki, hogy a_v a hőmérséklet emelkedésével csökken s az eltérések legrohamosabbak a kritikus hőmérséklet körül. Az itt látott viszonyokat, épen mivel igen tág határokra vonatkoznak ($-145°$-tól $+100°$-ig, 10 atm.-tól 130 atm.-ig), felhasználhatjuk arra, hogy belőlük a légnemű testek viselkedésére typikus vonásokat összefoglaljunk. Látszik ekkor, hogy a Gay-Lussac törvény is, mint azt a Boyle-Mariotte törvénynél láttuk, annál nagyobb érvényességű, minél távolabb megyünk a kritikus hőmérséklettől; ott a kritikus hőmérséklettől igen távol PV görbéje az egyenes vonalhoz közeledett s mindig jobban parallellé vált az abscissa tengelylyel (VIII. k. 386. l. 19. ábra); itt pedig a görbék mindig jobban megközelitik az ordináta tengelylyel parallel egyenes alakját és irányát. Hogy a továbbkutatásban igen magas hőmérsékleteket kellene előállitani, az látszik a görbék összetömörüléséből, mely különösen a 26. ábrán feltünő.

A halmazállapotváltozás másik neménél *(olvadás és fagyás)*, sokkal kevesebb eredményről szólhatunk. Hogy a halmazállapotváltozásnál a kiterjedésben itt is erős változás jelentkezik, azt a jégnél tapasztalhatjuk legjobban. Erre mutatnak a vassal végzett kisérletek is, melyek szerint a szilárd öntött vas a folyékonyon úszik. Mások szerint ismét az erős hevitésnek kitett fémek kiterjedési viszonyai megváltoznak. Hogy itt jelentékeny változás áll be, ha a test strukturája megváltozik, azt Rodwell * kisérletei is mutatják; a jódezüstnél a megfagyás pillanatában igen erős összehúzódás lépett föl; mikor a jódezüst amorph állapotból kristályosba ment át, hirtelen és erősen kiterjedt. Ezek azonban mind igen kisszámú kisérletek és eredmények.

Röviden megemlékezünk *a keverékekre és oldatokra* vonatkozó vizsgálatokról is.

A szabályt, a mely szerint a kiterjedés az alkotórészek kiter-

---

* Berl. Ber. 1876, 1882.

jedésétől függ, még egyáltalában nem ismerjük. Az oldatoknál a kiterjedés annál egyenletesebb, minél telítettebb az oldat; alacsony hőmérsékletnél az oldat kiterjedése nagyobb, mint a tiszta oldószeré, magasabb hőfokoknál kisebb; van azután egy pont, a hol a két kiterjedés egyenlő. Analog eredmények mutatkoznak *a gázoldatok*nál is.

Nagy szabálytalanságok merülnek föl az ötvények kiterjedésénél. A szilárd ötvényeknél a kiterjedési koefficziens változása hol növekvő, hol csökkenő; a hevítésnél a kiterjedést néha összehuzódás váltja fel. Az alkotórészek befolyását nem ismerjük sem a szilárd, sem a folyékony ötvényeknél.

Péch Aladár.

TÉTEL A SZABÁLYOS CSILLAGSOKSZÖGEKRŐL.

Az idei mathematikai tanulóverseny első tétele a következő volt:

I. *Az A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 pontok az egységnyi sugarú kör kerületét öt egyenlő részre osztják; bizonyíttassék be, hogy az A_0A_1 és A_0A_2 húrok között az*

$$(A_0A_1 . A_0A_2)^2 = 5 \tag{1}$$

egyenlőség áll fenn.

Rados tanár úr figyelmeztetett e tételnek valódi jelentésére s felszólított, hogy vizsgáljam meg a fellépő viszonyokat abban az esetben, midőn az egységnyi sugarú kör kerületét n egyenlő részre osztjuk, a hol n tetszőleges pozitiv egész szám.

Az I. alatti tétel új alakja, mely az általánosításra serkent, a következő:

I*. *Ha a_1 és a_2 az egységnyi sugarú körbe írható összes «különböző» szabályos ötszögek oldalhosszának mérőszámai, akkor*

$$(a_1a_2)^2 = 5. \tag{1*}$$

Egy adott körbe ugyanis a közönséges szabályos n-szögön kívül általában még más oly idomok írhatók, a melyek joggal szintén szabályos n-szögeknek nevezhetők, minthogy a közönséges szabályos n-szöggel összes lényeges tulajdonságaikban megegyeznek.

Ily idomok akkor keletkeznek, ha a kör kerületének valamely A_0 pontjából kiindulva oly a távolságot rakunk fel húr gyanánt n-szer egymásután, hogy az n-edik húr második végpontja az A_0-ba esik, míg a többi húr csupa egymástól és A_0-tól különböző pontokban végződik. Ha úgy a közönséges szabályos n-szögben, mint ezekben az új idomokban a húrokat a megfelelő végtelenül kiterjedt egyenesekkel helyettesítjük, belátható, hogy a szabályos n-szög s emez új idomok egészen analog geometriai alakzatok, minthogy csupán abban különböznek, hogy a közönséges szabályos n-szögnél amaz oldalak metszéspontjai, mely oldalak nem a kör kerületén metszik egymást a körön kívül, míg az új idomoknál a körön belül feküsznek. Valóban joggal nevezhetők tehát ezek az új idomok is szabályos n-szögeknek, még pedig alakjuknál fogva szabályos *csillag-n-szögeknek.*

Ha az összes szabályos n-szögeket, a melyek ugyanegy körbe irhatók, osztályozzuk, még pedig úgy, hogy ugyanabba az osztályba sorozzuk azokat, a melyeknek oldalhossza ugyanaz, az így nyert osztályok számát röviden az összes *különböző* szabályos n-szögek számának fogjuk nevezni. Hasonló kifejezésmódot használtunk az 1*) tétel kimondásában is.

Czélunk megvizsgálni, vajjon n-nek 5-től különböző értékeinél létezik-e az összes különböző szabályos n-szögek oldalhosszai közt egy az 1*)-nek megfelelő összefüggés.

E végből mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a különböző szabályos n-szögek száma, a melyet a következőkben $\varphi(n)$-nel fogunk jelölni, véges, és meg kell határoznunk $\varphi(n)$ függését az n-től. Bár ez nehány elemi mathematikai kézikönyvben megtalálható,* mégis azt hiszem, hogy nem annyira ismert dolog, hogy eme, amúgy is igen egyszerű tárgyalás közlése teljesen felesleges volna.

$\varphi(n)$ meghatározásánál elég ama szabályos n-szögek megvizsgálására szorítkoznunk, a melyeknek egy közös A_0 kerületi szögpontjuk van, minthogy bármely szabályos n-szög, mint merev rendszer, tehát oldalhosszának megtartásával, a kör középpontja körül elforgatható úgy, hogy egy kerületi szögpontja A_0-ba essék.

Tegyük most fel, hogy az A_0, A_1, A_2, . . ., A_{n-1} pontok, a melyek a kör kerületén bizonyos irányban a felírt sorrendben egymásután következnek, a kör kerületét n egyenlő részre osztják. Ez esetben az összes ívdarabok, a melyeknek végpontjai A_i és

---

* BALTZER: Elemente der Mathematik II. 49. l.
ROUCHÉ et COMBEROUSSE: Traité de Géométrie I, 175. l.

$A_k (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, a kör kerülete n-edrészének egész számú többszörösei, ha tehát az ívhosszak mérőszámának egységéül a kör kerületének n-edrészét választjuk az összes A_iA_k ívdarabok hosszának mérőszámai egész számok lesznek, még pedig egy A_0-ból kiinduló, egy bizonyos, pl. az A_0A_1 meghatározta forgás-irányban pozitivnak tekintett s egy A_k pontban végződő A_0A_k ívdarab hosszának mérőszáma, ama k' egész számok egyike, a melyeknek mod. n vett legkisebb pozitiv maradéka k. Ebből már következik, hogy $\psi(n)$ véges.

Ha ugyanis a egy szabályos n-szög két szomszédos kerületi szögpontja közt fekvő ívdarab hosszának mérőszáma az imént bevezetett ívhosszegységben kifejezve, a szabályos n-szög definicziója értelmében, ha az a hosszúságú ívdarabot A_0-ból kiindulva n-szer egymásután felrakjuk a kör kerületére az n-dik ívdarab második végpontja a kiinduló pontba A_0-ba esik. Ez az n a hosszúságú ívdarab együtt oly ívdarab, a melynek hossza na s a melynek mindkét végpontja A_0, tehát na oly *egész* szám, a melynek legkisebb pozitiv maradéka mod. n 0, azaz:

$$na \equiv 0 \,(\text{mod.}\, n)$$

na tehát n-nel osztható egész szám, s igy a maga is egész szám. Szabályos n-szög oldalai tehát csak az $A_0A_k (k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ívektől átfogott húrok lehetnek, mivel csak ezek az A_0-ból kiinduló ívek a kör kerülete n-edrészének egész számú többszörösei. $\psi(n)$ tehát véges, mert legfeljebb n-nel lehet egyenlő, minthogy az összes A_0-ból kiinduló és A_k-ban végződő íveknek ugyanaz a húr felel meg.

Melyek az A_0A_k ívek közül szolgáltatnak most már valóban szabályos n-szöget?

A szabályos n-szögek definicziója értelmében, feltéve, hogy az A_0A_k ívdarab szabályos n-szög oldalát fogja be, ha az A_0A_k ívdarabot A_0-ból kiindulva n-szer egymásután rakjuk fel a kör kerületére, az első $n-1$ ívdarab második végpontjai egymástól és A_0-tól különbözők lesznek, A_0A_k hosszának mérőszáma k' tehát azzal a tulajdonsággal bir, hogy a

$$k',\ 2k',\ \ldots,\ (n-1)k'$$

számok, a melyek nem egyebek, mint az A_0-ból kiindulva

$$1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)\text{-}$$

szer egymásután felrakott A_0A_k iv hosszának mérőszámai, csupa 0-tól és egymástól különböző legkisebb pozitiv maradékot adjanak mod. n. Ennek pedig, mint ismeretes, szükséges és elegendő feltétele az, hogy k' n-hez képest relativ prim legyen. Minthogy pedig, ha

$$k' \equiv k'' \ (\text{mod. } n)$$

az A_0-ból kiinduló k' és k'' hosszúságú íveknek ugyanaz az A_k végpont, tehát ugyanaz a húr felel meg, hogy az összes különböző szabályos n-szögeket megkapjuk, elég k'-nek a mod. n teljes maradékrendszerben, pl. a

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

számok közt előforduló n-hez relativ prim értékeket tulajdonitani; ezeknek számát jelöljük a számelméletben $\varphi(n)$-nel.

Ha tehát:

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{\varphi(n)} \tag{2}$$

ez a $\varphi(n)$ szám, akkor az

$$A_0A_{k_1},\ A_0A_{k_2},\ \ldots,\ A_0A_{k_{\varphi(n)}} \tag{3}$$

húrok mindegyike egy-egy szabályos n-szög oldala. A 3) alatti sorozatban előforduló különböző húrok száma lesz most $\psi(n)$.

Világos, hogy az

$$A_0A_k \quad \text{és} \quad A_0A_{n-k} \tag{4}$$

húrok hosszúsága ugyanaz, minthogy oly ívek fogják őket át, a melyek mérőszámai k' és k'' között a

$$k' + k'' \equiv 0 \ (\text{mod. } n)$$

összefüggés áll fenn, a mi az jelenti, hogy eme körívek összege a kör egész kerületének egész számú többszöröse. Mivel pedig, ha k_j előfordul a 2) sorozatban $n-k_j$ is előfordul, a 3) alatti sorozatban előforduló húrok páronkint egyenlő hosszúságúak; $\psi(n)$ tehát legfeljebb $\frac{\varphi(n)}{2}$-vel egyenlő.*

Hogy $\psi(n)$ valóban egyenlő $\frac{\varphi(n)}{2}$-lel, az ki lesz mutatva, ha bebizonyítjuk, hogy ha a 2) alatti számok egy növekedő sorozatot alkotnak, az

$$A_0A_{k_1},\ A_0A_{k_2}, \ldots, A_0A_{k_\nu} \tag{5}$$

húrok mind különbözők, a hol $\nu = \frac{\varphi(n)}{2}$.

Ez valóban így van, mert két húr csak úgy lehet egyenlő, ha az egyiket átfogó, az egész körkerületnél kisebb két ív mindegyike egy-egy, a másikat átfogó, egész kerületnél kisebb ívvel egyenlő; a 4) alatti sorozatban idézett húroknál azonban ez lehetetlen, mert, ha i és j különbözők, sem a

$$k_i = k_j$$

sem a

$$k_i = k_{n-j}$$

egyenlőségek nem állhatnak fenn.

Kimutattuk tehát, hogy

$$\psi(n) = \frac{\varphi(n)}{2}. \tag{II}$$

Ha $n=5$

$$\frac{\varphi(n)}{2} = 2$$

s látható, hogy az I. tétel I*) alatti fogalmazása jogosult.

Az I*)-nek most a következő általánosítását fogjuk kimutatni: Ha

$$A_0A_{k_i} = a_i \tag{6}$$
$$(i=1, 2, \ldots, \nu)$$

azaz: *ha $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ az egységnyi sugarú körbe írható összes különböző szabályos n-szögek oldalhosszának mérőszámai, akkor*

---

* Ha azoktól a triviális esetektől, midőn $n \leq 2$ eltekintünk, $\varphi(n)$ mindig páros.

a) $$(a_1 a_2 \ldots a_\nu)^2 = p,$$

ha n a p törzsszámnak hatványa, és

b) $$(a_1 a_2 \ldots a_\nu)^2 = 1,$$

ha n legalább két különböző törzsszámmal osztható.

E tétel bizonyítása algebrai problémára vezethető vissza ama megjegyzés alapján, hogy minden, az egységnyi sugarú kör kerületén lévő, A_k osztópont egy a_k n-edik egységgyököt ábrázolhat $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ és $a_0=1$. Ha pedig az egész számok összességét az A_k osztópontokra úgy képezzük le, hogy minden k' egész számhoz, a melynek mod. n vett legkisebb pozitiv maradéka k, az A_k osztópontot, az A_k osztóponthoz pedig az összes ily k' egész számokat rendeljük, belátható, hogy amaz A_{k_i} osztópontok, a melyek szabályos n-szögeket szolgáltatnak primitiv n-edik egységgyököket fognak ábrázolni, más osztópontok pedig primitiv n-edik egységgyököket nem ábrázolhatnak. Moivre tétele értelmében ugyanis az a_k egységgyök m-edik hatványát az mk számhoz tartozó A osztópont fogja ábrázolni és ha a

$$k,\ 2k,\ \ldots,\ (n-1)k,\ nk$$

számoknak megfelelő osztópontok különbözők, különböző n-edik egységgyökök lesznek az

$$a_k,\ a_k^2,\ \ldots,\ a_k^{n-1},\ a_k^n$$

hatványok is, a mi az egységgyök primitivitásának föltétele.

Az

$$A_{k_1},\ A_{k_2},\ \ldots,\ A_{k_{\varphi(n)}}$$

osztópontok az

$$a_{k_1},\ a_{k_2},\ \ldots,\ a_{k_{\varphi(n)}}$$

egységgyököket ábrázolják, ezek tehát az összes n-dik primitiv egységgyökök, hacsak a $k_i (i=1, 2, \ldots, \varphi(n)$ számok a 2) alatti sorozat számai.

A komplex számok és a sík egyenes darabjai közt létesíthető vonatkozás értelmében az $A_0 A_k$ egyenesdarab hosszának mérőszáma az $1-a_k$ komplex szám abszolut értékével egyenlő, s mivel az 5) alatti képlet alapján, a 6) alatti jelölést használva:

$$A_0A_{k_1}.A_0A_{k_2}\dots A_0A_{k_{\varphi(n)}}=(a_1a_2\dots a_\nu)^2$$

azt kapjuk, hogy

$$(a_1a_2\dots a_\nu)^2=|(1-a_{k_1})(1-a_{k_2})\dots(1-a_{k_{2\nu}})|,$$

a mit még így is írhatunk a következő jelölés használatával

$$\Phi_n(x)\equiv(x-a_{k_1})(x-a_{k_2})\dots(x-a_{k_{2\nu}})$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_\nu)^2=\Phi_n(1) \qquad \text{III)}$$

$$\Phi_n(x)=0 \qquad 7)$$

az a $\varphi(n)$-edfokú egyenlet, a melynek gyökei az összes primitiv n-edik egységgyökök és csak ezek; Φ_n-ben azonkívül x legmagasabb hatványának együtthatója az egység. Problémánk ez által a $\Phi_n(1)$ helyettesítési érték meghatározására van visszavezetve.

$\Phi_n(x)$ szerkezete, a melynek részletes vizsgálata a legtöbb algebrai kézikönyvben megtalálható,* különböző a szerint, a mint n egyetlen primszám hatványa, vagy egynél több primszámmal is osztható; innen van az, hogy az $(a_1a_2\dots a_\nu)^2$ kifejezés értéke n számelméleti szerkezetétől függ.

a) Legyen

$$n=p^\alpha$$

a hol p primszám. Az $\alpha=1$ eset azonnal elintézhető, ez esetben ugyanis, mivel

$$(k, p)=1,^{**}$$

hacsak

$$k=1, 2, \dots, p-1$$

az $a_0=1$ kivételével az összes egységgyökök primitivek, tehát:

$$\Phi_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+x+1$$

---

* Pl. Weber Algebra (II. kiadás) I. kötet, 141. §.
Bachmann. Die Lehre von der Kreistheilung 14. l.

** (k, p) a k és p számok legnagyobb közös osztóját jelenti.

és így

$$(a_1 a_2 \ldots a_{\frac{p-1}{2}})^2 = p, \qquad a')$$

a mi nem egyéb, mint az *a)* alatti képlet speciális esete.

Legyen most $\alpha > 1$.

Hivatkozom az egységgyököknek ama tulajdonságára, hogy minden n-edik egységgyök n-nek egy és csak egy osztójára nézve primitiv egységgyök, más szóval n egy és csak egy osztójához tartozik.*

Ha $n = p^\alpha$ n összes osztói: $1, p, p^2, \ldots, p^{\alpha-1}, p^\alpha$; minden n-dik egységgyök valamely p^β-ra nézve primitiv gyök, a hol β a $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$ számok valamelyike; minden n-edik egységgyök tehát vagy primitiv n-edik egységgyök, vagy $p^{\alpha-1}$ valamely osztójához tartozik, tehát $p^{\alpha-1}$-dik egységgyök, mivel továbbá az összes $p^{\alpha-1}$-dik egységgyökök egyúttal p^α-dik egységgyökök is

$$\Phi_{p^\alpha}(x) = \frac{x^{p^\alpha} - 1}{x^{p^{\alpha-1}} - 1} = \frac{(x^{p^{\alpha-1}})^p - 1}{x^{p^{\alpha-1}} - 1} =$$

$$= (x^{p^{\alpha-1}})^{p-1} + (x^{p^{\alpha-1}})^{p-2} + \ldots + x^{p^{\alpha-1}} + 1,$$

tehát:

$$(a_1 a_2 \ldots a_\nu)^2 = p \quad \text{ha} \quad n = p^\alpha. \qquad a)$$

b) Legyen végre

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \qquad 8)$$

a hol a p-k különböző primszámok és legalább két α nagyobb a zérusnál. Minhogy minden n-dik egységgyök n-nek egy és csak egy osztójára nézve primitiv egységgyök, $\Phi_n(x)$-et megkapjuk, ha $x^n - 1$-et n összes n-nél kisebb osztóinak megfelelő $\Phi(x)$-ekkel elosztjuk, tehát:

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod\limits_d \Phi_d(x)}, \qquad 9)$$

a hol a Π jel n összes nála kisebb osztóira terjesztendő ki; ez osztók sorozata pedig:

---

* l. pl. KÖNIG, Analisis 162. l.

$$\begin{array}{l} 1, \quad p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{\alpha_1} \\ p_2, p_2^2, \ldots, p_2^{\alpha_2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_r, p_r^2, \ldots, p_r^{\alpha_r} \end{array}$$

és az összes ily alakú számok:

$$d' = p_1^{\alpha'_1} p_2^{\alpha'_2} \ldots p_r^{\alpha'_r},$$

a hol

$$\alpha'_k = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_r < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r \tag{10}$$

és legalább két $\alpha' > 0$.

A 9) alatti képlet tehát részletesebben kiírva a következő:

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{(x-1)\Phi_{p_1}(x)\Phi_{p_1^2}(x)\ldots\Phi_{p_1^{\alpha_1}}(x)\ldots\Phi_{p_r}(x)\ldots\Phi_{p_r^{\alpha_r}}(x)\prod_{d'}\Phi_{d'}(x)} =$$

$$= \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1}{\Phi_{p_1}(x)\Phi_{p_1^2}(x)\ldots\Phi_{p_1^{\alpha_1}}(x)\ldots\Phi_{p_r}(x)\ldots\Phi_{p_r^{\alpha_r}}(x)\prod_{d'}\Phi_{d'}(x)},$$

mivel pedig az *a)* képlet szerint:

$$\Phi_{p_i^k}(1) = p_i$$

$$\begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, \alpha_i \\ i = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

$$\Phi_n(1) = \frac{n}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \prod_{d'}\Phi_{d'}(1)}$$

s igy a 8) alatti képlet értelmében:

$$\Phi_n(1) = \frac{1}{\prod_{d'}\Phi_{d'}(1)}. \tag{11}$$

Minden egyes $\Phi_{d'}(1)$ kiszámitására most már magát a 11) képletet használhatjuk fel, minthogy d' ép úgy mint n legalább két különböző primszámmal osztható.

Tehát:

$$\Phi_{d'}(1) = \frac{1}{\prod_{d''}\Phi_{d''}(1)},$$

a hol

$$d''=p_1^{\alpha_1''}p_2^{\alpha_2''}\dots p_r^{\alpha_r''}$$

$$\alpha_k''=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ \alpha_k'$$

$$(k=1,\ 2,\ \dots\ r)$$

de úgy, hogy:

$$\alpha_1''+\alpha_2''+\dots+\alpha_r''<\alpha_1'+\alpha_2'+\dots+\alpha_r' \qquad 12)$$

és legalább két $\alpha''>0$.

A redukczió így folytatható, a míg a 10, 12, s í, t. egyenlőtlenségek alapján egy oly $d^{(j)}$-hez nem jutunk, a mely ily alakú: $p_s^\beta p_t$, a hol $\beta>0$; de akkor a 9) szerint:

$$\Phi_{d^{(j)}}(x)=\frac{x^{d^{(j)}-1}+x^{d^{(j)}-2}+\dots+x^{d^{(j)}}+1}{\Phi_{p_s}(x)\,\Phi_{p_s^2}(x)\dots\Phi_{p_s^\beta}(x)\,\Phi_{p_t}(x)},$$

tehát

$$\Phi_{d^{(j)}}(1)=1.$$

Ebből azonban már következik, hogy egész általánosságban, ha $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$, a hol legalább két α érték különbözik a zérustól

$$\Phi_n(1)=1,$$

tehát

$$(a_1a_2\dots a_\nu)^2=1. \qquad b)$$

Tételünk ezzel teljesen be van bizonyítva.

Zemplén Győző.

A KOMPLEX VÁLTOZÓ GAMMAFÜGGVÉNYÉRŐL.

(Harmadik közlemény.)

III. A gammafüggvény alaptulajdonságai.

12. A gammafüggvény az alkalmazásoknál mint az előbbi fejezetben vizsgált vagy más, erre visszavezethető, integrál szokott fellépni. De magára $\Gamma(x)$ vizsgálatára kényelmesebb a szorzat alak vagy — mi lényegében ugyanaz — a

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n=\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$$

képlet. E kifejezésről már az első fejezetben igazoltuk, hogy eleget tesz a

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{I}$$

és

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x (n-1)!} = 1 \tag{II}$$

azonosságoknak. Most néhány más tulajdonságát vezetjük le hasonló módon.

13. Az I) képlet értelmében

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x),$$

tehát

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = -x\Gamma(x)\Gamma(-x) = -x \lim_{n=\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(-x) =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{n=\infty} \left[(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n-1)^2}\right)\right]^{-1}.$$

Vagyis

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)}. \tag{21}$$

Ámde ismeretes, hogy

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

és innen

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Ezt 21) alatt tekintetbe vévén

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \qquad \text{III)}$$

14. Ugyanez még más czélszerű alakokban is fejezhető ki. Irjuk pl. $\Gamma(1-x)$ helyébe a vele egyenlő

$$-x\Gamma(1-x)$$

kifejezést és oszszunk $(-x)$-szel. Leszen:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(-x) = \frac{-\pi}{x \sin \pi x}. \qquad \text{III}a)$$

Ha pedig III) alatt x helyébe $(\frac{1}{2}+x)$-et helyettesítünk, akkor

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+x)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-x) = \frac{\pi}{\cos \pi x}. \qquad \text{III}b)$$

Innen $x = 0$ esetében

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}. \qquad 22)$$

15. Ha IIIa) és IIIb) alatt x az ui tisztán képzetes számmal egyenlő, akkor e képletek bal oldalai konjugált komplex számoknak szorzatai. Az ily szorzatról tudjuk, hogy értéke bármelyik tényező abszolut értékének négyzetével egyenlő. Tehát ebben az esetben azt kapjuk, hogy

$$|\Gamma(ui)|^2 = \frac{-\pi}{ui \sin \pi ui} = \frac{2\pi}{u(e^{\pi u} - e^{-\pi u})}$$

és

$$|\Gamma(\tfrac{1}{2}+ui)|^2 = \frac{\pi}{\cos \pi ui} = \frac{2\pi}{e^{\pi u} + e^{-\pi u}}.$$

Innen:

$$|\Gamma(ui)| = \left(\frac{2\pi}{u(e^{\pi u} - e^{-\pi u})}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad 23a)$$

és

$$|\Gamma(\tfrac{1}{2}+ui)| = \left(\frac{2\pi}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad 23b)$$

16. Helyettesitsük III) alatt x helyébe rendre az

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

törteket és a nyert képleteket szorozzuk össze. Akkor

$$P^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{k\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}, \qquad 24)$$

hol rövidség kedvéért

$$P = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{k}\right).$$

A nevező egy-egy tényezőjének kétszerese

$$2\sin\frac{k\pi}{n} = \left(2-2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left\{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

vagyis

$$2\sin\frac{2k\pi}{n} = |1-a_k|$$

hol

$$a_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Tehát

$$2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = |(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n-1})|.$$

Ámde az a-k nem egyebek, mint az

$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$$

körosztási egyenlet gyökei. Tehát

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) = x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1,$$

és innen $x=1$ esetében

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n-1})=n.$$

Ezt 25) tekintetbe vévén:

$$2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=n,$$

és

$$P^2=\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}.$$

Tehát

$$P=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{(2\pi)^{n-1}n^{-1}}.$$

Még pedig a négyzetgyöknek pozitiv értéke veendő, mert a gammafüggvény a változónak minden pozitiv értékénél maga is pozitiv.

Ennélfogva

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}. \qquad \text{IV)}$$

17. Számitsuk ki az előbbinél általánosabb

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

szorzatot is. E végből oszszuk el egymással a

$$\varphi_r\left(x+\frac{k}{n}\right)=\frac{r^{x+\frac{k}{n}}(r-1)!}{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+1+\frac{k}{n}\right)\ldots\left(x+r-1+\frac{k}{n}\right)}=$$

$$=\frac{r^{x+\frac{k}{n}}n^r(r-1)!}{(nx+k)(nx+n+k)\ldots(nx+\overline{r-1}\,n+k)}$$

és

$$\varphi_r\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{r^{\frac{k}{n}}n^r(r-1)!}{k(n+k)\ldots(\overline{r-1}\,n+k)}$$

kifejezéseket. Leszen

$$\frac{\varphi_r\left(x+\frac{k}{n}\right)}{\varphi_r\left(\frac{k}{n}\right)}=\frac{r^x k(n+k)\ldots(\overline{r-1}\,n+k)}{(nx+k)(nx+n+k)\ldots(nx+\overline{r-1}\,n+k)}.$$

Helyettesitsünk itt k helyébe rendre

$$1, 2, \ldots, n-1$$

-et,továbbá szorozzuk meg az igy nyert képleteket egymással és a következővel:

$$\varphi_r(x) = \frac{r^x 1 \cdot 2 \ldots (r-1)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+r-1)} =$$

$$= \frac{nr^x n \cdot 2n \ldots (r-1)n}{nx(nx+n)(nx+2n)\ldots(nx+\overline{r-1}\,n)}.$$

Leszen

$$\frac{\varphi_r(x)\,\varphi_r\left(x+\frac{1}{n}\right)\varphi_r\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\varphi_r\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\varphi_r\left(\frac{1}{n}\right)\varphi_r\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\varphi_r\left(\frac{n-1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{nr^{nx}(rn-1)!}{nx(nx+1)(nx+2)\ldots(nx+rn-1)} = n^{1-nx}\,\varphi_{rn}(nx),$$

és ha $r=\infty$, akkor

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)} = n^{1-nx}\,\Gamma(nx).$$

Ha még e képletet megszorozzuk a IV) alattival, akkor végre

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx). \qquad \text{V)}$$

Pl. $n=2$ esetében

$$\Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{2}-2x}\,\Gamma(2x)$$

vagyis

$$\frac{2^{2x}\,\Gamma(x)\,\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(2x)} = 2\pi^{\frac{1}{2}}. \qquad 26)$$

A IV) és V) alatti képletek GAUSS-tól valók.

IV. Segédtételek.

18. Hogy a következő fejezet tárgyalásait ne kelljen megszakítanunk, a szükséges segédtételeket e fejezetben bocsátjuk előre.

Az egyik segédtétel a

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi t}{k\pi} \tag{27}$$

trigonometriai sorra vonatkozik, hol t valós változót jelent. E sor a trigonometriai sorok elmélete nélkül is összegezhető.

E végből induljunk ki a

$$\sin \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

képletből. Irjuk itt α helyébe v felét, β helyébe pedig rendre v többeseit. Leszen:

$$\sin\frac{v}{2}\cos v = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3v}{2} - \sin\frac{v}{2}\right)$$

$$\sin\frac{v}{2}\cos 2v = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5v}{2} - \sin\frac{3v}{2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\frac{v}{2}\cos nv = \frac{1}{2}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)v\right),$$

és ha összeadunk, akkor

$$\sin\frac{v}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kv = \frac{1}{2}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v - \sin\frac{v}{2}\right).$$

Oszszunk még $\sin\frac{v}{2}$ felével és irjunk v helyébe $2\pi t$-t. Leszen

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\pi t = -1 + \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}.$$

Továbbá integráljunk itt az $\frac{1}{2}$ és t határok közt, hol $0 < t < 1$. Ekkor:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2k\pi t}{k\pi} = \frac{1}{2} - t + \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t} dt. \tag{28}$$

Ha még kimutatjuk, hogy

$$\lim_{n=\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t} dt = 0,$$

akkor t-nek minden pozitiv valódi tört értékénél:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi t}{k\pi} = \frac{1}{2} - t. \tag{29}$$

19. Hogy

$$\rho_n = \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t} dt$$

nagyságát megitélhessük, integráljunk párcziálisan. Leszen:

$$\rho_n = -\frac{\cos(2n+1)\pi t}{(2n+1)\pi} \frac{1}{\sin \pi t} - \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{\cos(2n+1)\pi t}{2n+1} \frac{\cos \pi t}{\sin^2 \pi t} dt.$$

Ha $\frac{1}{2} < t < 1 - \delta$, hol δ egy tetszőlegesen kicsinynek választható, de állandó pozitiv szám, akkor itt a számlálók -1 és $+1$ közé esnek. Továbbá a nevezőkben

$$\sin \pi t \geqq \sin \pi\delta.$$

Végre az integrálás két határa közötti különbség kisebb $\frac{1}{2}$-nél. Ennélfogva

$$\left| \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{\cos(2n+1)\pi t}{2n+1} \frac{\cos \pi t}{\sin^2 \pi t} dt \right| < \frac{1}{2(2n+1)\sin^2 \pi\delta}.$$

Továbbá

$$\left| \frac{\cos(2n+1)\pi t}{(2n+1)\pi} \frac{1}{\sin \pi t} \right| < \frac{1}{2(2n+1)\sin \pi\delta} < \frac{1}{2(n+1)\sin^2 \pi\delta}.$$

E szerint esetünkben:

$$|\rho_n| < \frac{1}{(2n+1)\sin^2 \pi\delta}.$$

Ha most t helyébe $(1-t)$-t irunk, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2k\pi t}{k\pi} \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} - t,$$

tehát ρ_n is, csak előjelét változtatja. Ennélfogva a $|\rho_n|$-re nyert egyenlőtlenség $\delta < t \leqq \frac{1}{2}$ esetében is igaz.

Innen valóban $\lim \rho_n = 0$. Továbbá a $|\rho_n|$-re talált felső határ független lévén t-től, sorunk a

$$\delta \leqq t \leqq 1-\delta$$

egyenlőtlenségnek megfelelő számközben *egyenletesen* összetartó.

Mindent összefoglalva: *A*

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi t}{k\pi}$$

sor minden oly intervallumban, melynek határai 0 és 1 közé esnek, egyenletesen összetartó és összege: $\frac{1}{2}-t$.

20. Ha t nem esik 0 és 1 közé, akkor $\varphi(t)$ többé nem egyenlő $(\frac{1}{2}-t)$-vel. Így már $t=0$ és $t=1$ esetében

$$\left[\frac{1}{2} - t\right]_{t=0} = \frac{1}{2} \qquad \left[\frac{1}{2} - t\right]_{t=1} = -\frac{1}{2}$$

ellenben

$$\Phi(0) = \Phi(1) = 0.$$

Míg a 29) képlet helyessége a $0 < t < 1$ egyenlőtlenséghez van kötve, addig a vizsgált sor összetartásáról ez többé nem áll. Ha ugyanis t helyébe $(n+t)$-t irunk, hol $0 \leqq t < 1$, n pedig egész számot jelent, akkor a $\Phi(n+t)$ sor tagról tagra megegyezik $\Phi(t)$-vel. Tehát a sor ekkor is összetartó és összege: $\Phi(n+t) = \Phi(t)$.

21. Másik segédtételünk az

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(t)}{x+t}\, dt$$

integrálra vonatkozik. Itt $g(t)$ a t-nek ráczionális egész függvénye, az integrálás pedig az $\alpha\beta$ valós számközre vonatkozik, hol $\alpha < \beta$. Ráczionális függvény integrálásáról lévén szó, az integrálás logaritmikus függvényre vezet, és $F(x)$ tulajdonságai a logaritmus tulajdonságaiból könnyen meghatározhatók.

Lássuk tehát először a logaritmusnak vizsgálatunkra nézve fontos tulajdonságait.

A logaritmus végtelenül sok értékű függvény. Ha valamely helyen $l.x$ egyik értéke $u+iv$, akkor ugyanott az összes értékeket a

$$l.x = u+i(v+2n\pi)$$

képlet adja meg, hol n tetszőleges egész számot jelent. Ha itt n-et úgy választjuk, hogy

$$-\pi < v+2n\pi \leqq \pi$$

akkor $l.x$ főértékét nyerjük.

Ha $f(x)$ az x-nek egyértékű függvénye, akkor $l.f(x)$ főértékét nem mindig czélszerű ugyanígy megállapitani. Pl. a következő fejezetben $l.\Gamma(x)$ főértékét másképp értelmezzük. De állandó számértéknek, továbbá lineáris egész vagy törtfüggvénynek logaritmusára nézve ugyanígy állapodunk meg. Vagyis

$$l.c \qquad l.(ax+b) \qquad l.\frac{ax+b}{cx+d}$$

főértékében a képzetes részt szintén úgy választjuk, hogy i együtthatója $-\pi$ és π közé essék (a felső határt megengedve, de az alsót kizárva).

Ezentúl logaritmus alatt rendszerint csak annak főértékét értjük.

22. Ábrázoljuk x értékeit a szokásos módon egy sik pontjaival. Ha a számsikot az $x = 0$ helytől a negativ számok féltengelyének mentén az $x = -\infty$ helyig végig hasítjuk, akkor e *metszet* kivételével $l.x$ (főértéke) mindenütt folytonos.

A metszet tetszőleges x_0 helyén $l.x$ valós részének limese $l.|x_0|$. A képzetes rész ellenben πi-hez vagy $(-\pi i)$-hez közeledik, a szerint, hogy x a számsík felső vagy alsó felében közeledik x_0-hoz.

E kétféle határátmenetnek tehát $l.x$ két különböző határértéke felel meg, melyeket következőleg jelölünk:

$$\overset{+}{l}.x_0 = l.|x_0| + \pi i$$

és

$$\overset{-}{l}.x_0 = l.|x_0| - \pi i.$$

Közülök csak az első adja meg $l.x_0$ főértékét. A kettőnek különbsége:

$$\overset{+}{l}.x_0 - \overset{-}{l}.x_0 = 2\pi i.$$

23. Ha a vizsgálandó

$$F(x) = \int_\alpha^\beta \frac{g(t)}{x+t}\, dt$$

integrálban

$$\alpha \leqq -x \leqq \beta$$

vagyis

$$-\beta \leqq x \leqq -\alpha,$$

akkor az integrálás határai közé eső

$$t = -x$$

helyen az integrálandó függvény elsőrendű végtelen, tehát az integrálás lehetetlen.

Ha azonban x komplex értékű, vagy ha valós, de nem esik $-\beta$ és $-\alpha$ közé, akkor az integrál véges és meghatározott értékű. Kiszámításánál csak az integrálásnál fellépő logaritmus követel némi óvatosságot. Ugyanis a logaritmus főértéke az argumentumnak negativ értékeinél elvesztvén folytonosságát, a határozatlan integrálást oly alakban kivánatos elvégeznünk, hogy a logaritmus jele alatti függvény az $\alpha\beta$ intervallumban negativ értéket ne vegyen fel. Csak ekkor szabad az integrálás határai között mindenütt a logaritmus alatt annak főértékét értenünk.

Az integrál két részre bontható:

$$F(x) = \int_\alpha^\beta h(t, x)\, dt + g(-x) \int_\alpha^\beta \frac{dt}{x+t}.$$

Az első részben

$$h(t, x) = \frac{g(t) - g(-x)}{t+x}$$

a t-nek és x-nek ráczionális egész függvénye. Tehát

$$G(x) = \int_{\alpha}^{\beta} h(t, x)\, dt$$

az x-nek ráczionális egész függvénye.

A második részben

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{x+t} = \left[l \,.\, \frac{x+t}{x+\alpha} \right]_{t=\alpha}^{\beta} = l \,.\, \frac{x+\beta}{x+\alpha} = -\, l \,.\, \frac{x+\alpha}{x+\beta} \,.$$

Az integrálás határai közé eső t-kre nézve

$$\frac{x+t}{x+\alpha}$$

mindig pozitiv vagy komplex értékű, tehát szabad l. alatt a logaritmus főértékét értenünk.

Végeredményben

$$F(x) = G(x) - g(x)\, l \,.\, \frac{x+\alpha}{x+\beta} \,. \tag{30}$$

Ha pl.

$$g(t) = \frac{1}{2} - t, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1,$$

akkor

$$h(t, x) = -1 \qquad G(x) = -1$$

és

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - t}{x+t} dt = (x + \tfrac{1}{2})\, l \,.\, \frac{x+1}{x} - 1. \tag{31}$$

24. $F(x)$ magaviselete különösen azon x helyek környezetében érdekel, hol az $F(x)$-et értelmező integrál elveszti értelmét.

Ha

$$-\beta \leqq x \leqq -\alpha,$$

akkor a logaritmus jele alatt fellépett

$$\frac{x+\alpha}{x+\beta}$$

hányados negativ értékű. Kérdésünk megoldása tehát csak annak alkalmazását követeli, a mit a logaritmusnak viselkedéséről az argumentum negativ értékeinek környezetében tudunk.

Rövidség kedvéért legyen

$$z=\frac{x+\alpha}{x+\beta}. \qquad 32)$$

E képlet x és z közt oly kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot állapit meg, hogy két összetartozó érték képzetes részeiben i együtthatói egyenlő előjelüek. Ha ugyanis

$$x=u+iv,$$

akkor

$$z=\frac{u+\alpha+iv}{u+\beta+iv}=\frac{(u+\alpha+iv)(u+\beta-iv)}{(u+\beta)^2+v^2}$$

képzetes részében i együtthatója

$$\frac{(\beta-\alpha)\,v}{(u+\beta)^2+v^2}.$$

Ez pedig, mivel $\beta>\alpha$, valóban a v-vel egyenlő előjelű. Továbbá $v=0$ esetében z-nek képzetes része is eltűnik.

Tehát ha x a számsík felső vagy alsó felében valamely $-\beta$ és $-\alpha$ közé eső x_0 valós számhoz közeledik, akkor

$$z=\frac{x+\alpha}{x+\beta}$$

a számsik ugyanazon felében közeledik a

$$z_0=\frac{x_0+\alpha}{x_0+\beta}$$

negativ számhoz. Továbbá

$$l.\frac{x+\alpha}{x+\beta}$$

mind a két határátmenetnél egy-egy meghatározott számhoz közeledik, de e két határérték nem egyenlő. A kettőnek különbsége: $2\pi i$.

Ha a mondottakat a 30) képletre alkalmazzuk, akkor a következő tételt kapjuk:

Ha az

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(t)}{x+t}\, dt$$

integrálban (hol $g(t)$ a t-nek ráczionális egész függvénye és $\alpha<\beta$) az x változó a számsíknak akár felső, akár alsó felében a $-\beta \ldots -\alpha$ intervallum valamely x_0 belső helyéhez közeledik, akkor $F(x)$ mind a két esetben egy-egy véges és meghatározott határértékhez közeledik. De e két határérték nem egyenlő, hanem különbségük:

$$F(\overset{+}{x_0}) - F(\overset{-}{x_0}) = -2\pi i g(-x_0). \qquad 33)$$

Kürschák József.

AZ ELEKTROMÁGNESES TÉR HATÁSA A FÉNYRE.*

Az a tárgy, melylyel foglalkozni fogunk, összekötő kapcsot képez az emberi tudás két fontos ága: az elektromágnességre és a fényjelenségekre vonatkozó ismereteink között. Önök előtt nagyon ismeretes, hogy a fényelmélet, melyről már-már azt hittük, hogy végleg megállapodott tudomány, MAXWELL merész újítása folytán egészen új alapot nyert, melyen az elméletet újból fel kellett építeni. Ez a munka részben már megtörtént, részben most van folyamatban. Ismeretes az is, hogy míg a régi elmélet a fényrezgéseket az æther rugalmas erőivel magyarázta, addig az új elméletnek alapja MAXWELL ama nézete, hogy a világító testek részecskéiben *elektromos mozgások* szakadatlan sora megy végbe és hogy az ezektől a térben keltett hullámzások — szintén elektromos természetű mozgások — hozzák létre azt a jelenséget, melyet fénynek nevezünk.

Első pillanatra úgy látszik, hogy ez az elmélet a régihez képest visszaesést jelent. Visszaesést, mert oly jelenségcsoportot, melyről elég határozott — bárcsak hypothetikus képzeteink voltak, oly jelenségcsoporttal igyekszünk megmagyarázni, melyről szóló képzeteink ez ideig bonyodalmasabbak, ingadozóbbak és határozatlanabbak. Az æther rezgéseinek mechanikájába már-már beletörődtünk s róluk szinte jól eső nyugalommal beszéltünk s most e biztos alapot el kellett hagynunk, hogy az elektromos mozgások, eltolódások és kölcsönhatások szövevényes s határozatlan gépezeteihez térjünk át.

Ha az egész újítás csak ennyiből állt volna, akkor a visszaesés

---

* Előadta a szerző a Math. és Phys. Társulat nov. 9-iki ülésén.

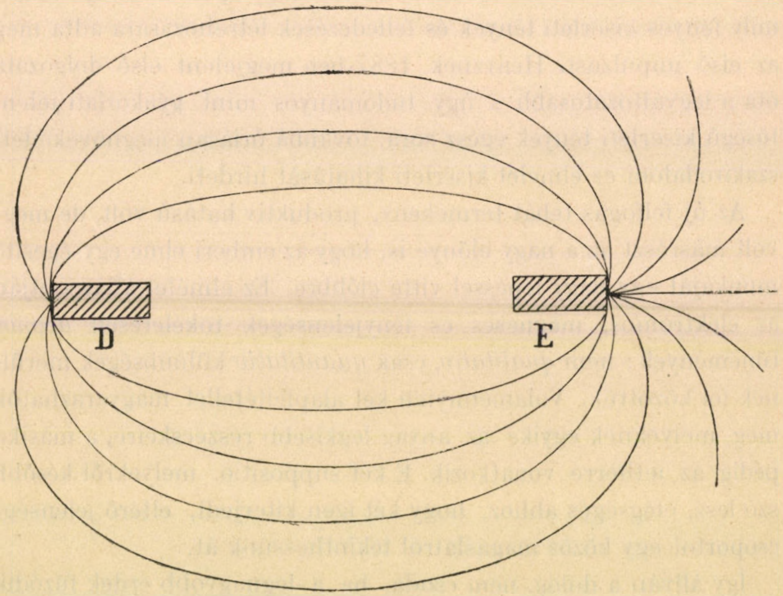
vádja jogosnak volna mondható. De Önök jól tudják, hogy az újítás nem állapodott meg itt, hanem a régi elektromos elméletet is hatalmas arányokban változtatta meg. Az elektromos fluidumokat kiküszöbölte, a távolbaható erők helyébe behozta a pontról-pontra, közegről-közegre tovaterjedő hatást. Ezek alapján a vezetőkről, szigetelőkről, az áramról, az áram munkájáról s az energia átalakulásának módjairól szóló fogalmaink is gyökeres változást szenvedtek. Ismeretes továbbá az is, hogy épen ez az új elmélet mily fényes kisérleti tények és felfedezések létrehozására adta meg az első impulzust. Hertznek 1887-ben megjelent első dolgozata óta a legváltozatosabb s úgy tudományos mint gyakorlati jelentőségű kisérleti tények egész sora, továbbá óriásan megnövekedett szakirodalom ez elmélet kisérleti kihatását hirdeti.

Az új felfogás tehát termékeny, produktiv hatású volt, de megvolt másrészt az a nagy előnye is, hogy az emberi elme egységesitő munkáját egy nagy lépéssel vitte előbbre. Ez elmélet álláspontján az elektromos, mágneses és fényjelenségek tökéletesen *azonos* tünemények; nem *qualitativ*, csak *quantitativ* különbségek merülnek fel közöttük. Valamennyien két alapfeltétellel magyarázhatók meg, melyeknek egyike az anyag legkisebb reszecskéire, a másika pedig az ætherre vonatkozik. E két suppositio, melyekről később szó lesz, elégséges ahhoz, hogy két igen kiterjedt, eltérő jelenségcsoportot egy közös magaslatról tekinthessünk át.

Így állván a dolog, nem csoda, ha a legnagyobb érdek fűződik mindama kisérleti tényekhez, melyek a két jelenségcsoport kölcsönhatásait mutatják. Nem számosak e tények, nem meglepők, de annál tanulságosabbak. A jelen előadásnak czélja rövid referátumot nyujtani főképen ama kisérleti tényekről, melyek a két utóbbi év, 1897 és 1898 alatt jöttek létre és pillantást vetni amaz elméleti megfontolásokra, melyek rájuk vonatkozólag tehetők.

Midőn ezt teszem, engedjék meg, hogy oly dolgokkal kezdjem, melyek már régóta ismeretesek. Hiszen nem kisebb ember — maga Faraday volt az, ki e kérdéssel először foglalkozott s hosszas kisérleti kutatások után valóban szép felfedezéseket is tett.

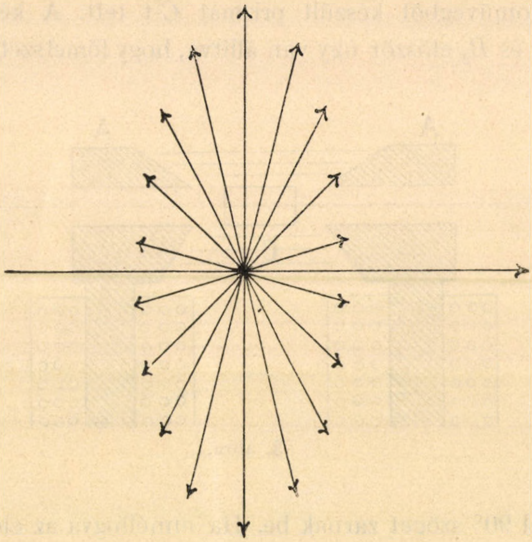
Hogy Faraday és a többi ez irányú kutatások természetét megérthessük, mindjárt most az elején bele kell magunkat képzelnünk az ő gondolatkörébe. FARADAYnak az volt a felfogása, hogy a mágnes körülötti tér erővonalakkal van benépesítve (1. ábra). Az erővonalakat azonban nem tekintette puszta mathematikai abstractióknak csupán, hanem valóságos physikai létet tulajdonított nekik, mely a tér állapotának bizonyos megváltozásában áll. E felfogás azt hozza magával, hogy a mágnesnek érthetetlen



1. ábra.

távolbahatása megszűnik s helyette a hatás pontról-pontra terjed tovább valami anyagon keresztül. Ez az anyag az æther; ugyanaz, mely a fényelméletben szerepelt. De hogy az ætherben az erővonalak mentén mi történik, arról egyelőre nincs határozott, megállapodott fogalmunk. Lehet, hogy e vonalak mentén valami feszülés lép fel, lehet, hogy az æther e vonalak irányában folyik: a mágnes egyik sarkán be, a másikon ki; de lehetséges az is, hogy e vonalak körül örvényszerű vagy keringő mozgást végez. Akárhogy áll azonban a dolog, az az egy bizonyos, *hogy ha a mágneses* *térben az aether bizonyos megváltozott állapotban van és ha a fény ugyanezen aether hullámszerű mozgásából áll, akkor előre várhatjuk, hogy a fényben valami változásnak kell fellépnie, ha mágneses téren halad keresztül.* Így következtetett FARADAY is s feltette magában, hogy e változást kisérletileg is kimutatja.

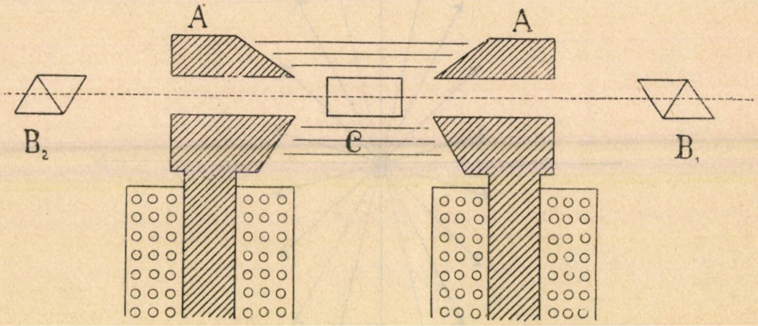
Ha e czélra természetes fényt használt, semmi változást sem észlelt. De ez az eredmény nem lepte meg őt, hiszen úgy képzelte, hogy a természetes fényben a rezgés a sugárra merőleges, minden



2. ábra.

irányban történik és egy irányhoz sincs valami állandó, különleges viszonyban (2. ábra). FARADAY előre sejtette, hogy a mágneses tér a rezgések irányát változtatja meg; ez a változás pedig a természetes fény minden irányú rezgéseinél sem nem észlelhető, sem le nem mérhető. Olyan fényt kellett tehát használnia, melyben a rezgések csakis egy meghatározott síkban mennek végbe. Ilyen fény, a mint az Önök előtt ismeretes, a *síkban polározott fény*; nyerhető úgy, hogy a természetes fényt, pl. mészpát kristályon szürjük keresztül és a két sugár közül, melyekre a természetes fény bomlik, csak az egyiket használjuk fel. Ilyen fénynél a rezgés síkját, ha elfogadjuk a Fresnel-féle elméletet, teljesen ismerjük és egy másik prizmával eldönthetjük azt is, hogy a rezgési sík a közben, hogy a fény áthaladt a mágneses téren, elfordult-e, sőt az elfordulás szögét pontosan le is mérhetjük.

Ilyen fényt használt Faraday s kisérleteit a következő módon rendezte be (3. ábra). Az elektromágnes két sarkát, AA-t keresztül fúrta, hogy a fénysugár akadálytalanul haladhasson az erővonalak irányában a mágneses téren keresztül. A két sark közötti térbe súlyos ólomüvegből készült prizmát C-t tett. A két Nicol-féle hasáb B_1 és B_2 először úgy van állítva, hogy főmetszeteiknek síkjai



3. ábra.

egymással 90° szöget zárnak be. Ha ennélfogva az elektromágnes nincs gerjesztett állapotban s a fény, mely B_1-nél síkrezgéssé változott a B_2 prizmához ér, akkor ezen nem haladhat keresztül, mert e prizma csak oly rezgéseket bocsát keresztül, melyeknek rezgési síkjuk párhuzamos az ő főmetszetének irányával. A B_2-őn túl tehát nem jut fény, vagyis az oda helyezett szem sötétséget lát. De ha most az elektromágnest gerjesztjük, tehát előállitjuk a mágneses teret: a látótér egyszerre világos lesz, a mi jele annak, hogy áthaladás közben a rezgések síkja elfordult, úgy hogy most van olyan komponens, mely a B_2 prizmán áthaladhat. E második prizma megfelelő forgatásával azt a szöget le is lehet mérni, melylyel a rezgések iránya megváltozott.

Faraday azt tapasztalta, hogy az elforgatás szögének nagysága függ a mágneses tér erősségétől, de függ amaz anyag természetétől és dimenzióitól is, melyen a fény áthaladt. Légüres térben nincs elforgatás és az elforgatás szöge nagyobbszik, ha a mágneses teret mind sűrűbb és sűrűbb anyag tölti ki. Ezekből szinte magától következik, hogy a rezgési sík annál jobban forog, minél hosszabb úton halad a fény az anyagon keresztül. Ha a fénysugár az áthaladás után visszaverődik és ellenkező irányban újból befutja a mágneses térbe helyezett anyagot, a forgás iránya ugyanaz marad, úgy hogy az elforgatás szöge megkétszereződik. Ily módon párhuzamos tükrök megfelelő elhelyezésével el lehet érni, hogy a sugár az anyagot egymásután többször ide-oda megjárja; e berendezéssel az eredeti, aránylag kicsiny elforgatási szöget jelentékeny módon meg lehet növelni. Sikerült bebizonyítani, hogy akárminő anyag van is a mágneses térben — gáznemű, folyékony vagy szilárd — a rezgési sík mindig elfordul. Hogy légüres térben nincs elforgatás, abból arra következtetünk, hogy a mágneses tér nem hat directe a rezgő ætherrészecskékre, hanem azon súlyamérhető anyagra, mely a teret kitölti.

Faraday e szép felfedezése után jöttek azután más, hasonló természetű kisérleti tények. Magától felmerül a gondolat, hogy különösen erős forgatást kell észlelnünk olyan anyagoknál, a minő a vas, nikkel, kobalt, melyeknek mágnesi foghatóságuk igen nagy. Csakhogy ez anyagok, szerencsétlenségünkre, a fényt nem bocsátják keresztül, átlátszatlanok. De tudjuk azt is, hogy újabb időkben oly vékony fémrétegeket sikerült előállitani, melyek már a fényt átbocsátják. Kundt elektrolytikus úton üveglemezre igen vékony vasréteget csapatott le és valóban az így nyert alig pár ezredmilliméter vastag vashártya már a fényt elegendőképen átbocsátotta. Ha mágneses térbe helyezte és síkban rezgő fényt bocsátott rajta keresztül, a rezgés síkja igen nagy szögértékkel fordult el. Ha 1 cm vastag vaslemez a fényt átbocsátaná, úgy a rezgések irányát 200,000 fokkal forditaná el.

Kerr vizsgálatai szerint a mágneses anyagok felületéről visszaverődött fény rezgéssíkja is forgást szenved. De vele kapcsolatban más jelenség is észlelhető, nevezetesen az, hogy az eredeti egyenesben rezgő fény ellipsisben rezgő fénynyé változik. A visszaverődésnél tehát egy új, az előbbeniekre merőleges rezgési komponens is keletkezik.

Ugyancsak Kerr mutatta ki, hogy ha a síkban rezgő fény elektrostatikai térbe helyezett anyagon (pl. szénszulfidon) halad keresztül, kettős törést szenved. A rendes és rendkívüli sugarak útkülönbsége függ az elektrostatikai tér intenzitásától.

Viszont ennek a tüneménynek is van mágneses analogonja, mely az eddigi jelenségeket érdekes új világitásban mutatja meg. Righi két ellenkező irányú körben rezgő fénysugarat állitott elő és azokat mágneses térbe helyezett szénkénegen küldte keresztül. Kettős törés jött létre. Az a körrezgés, melynek iránya megegyezik a mágneses teret előállitó elemi áramok irányával, *gyorsabban* terjed tovább mint az ellenkező irányú rezgés.

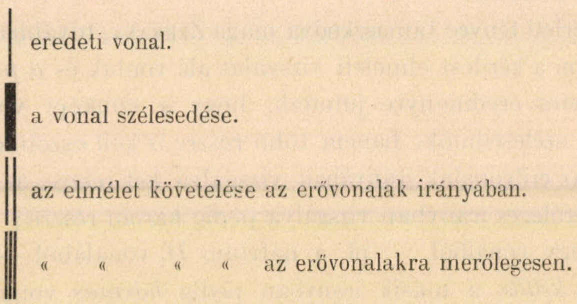
Valóban mindeme jelenségekről legjobban úgy adhatunk magunknak számot, ha a mágneses térben az ætherrészecskéket az erővonalak körül keringőknek képzeljük. Ha ilyen térbe még síkban rezgő fény is jut, akkor a keringő ætherrészecskék a rezgés irányát — úgyszólván — magukkal ragadják, vagyis megforgatják. Ezen az alapon épitette fel Kelvin lord is az ő elméletét és bebizonyította, hogy mindeme jelenségek nem magyarázhatók meg rugalmassági különbözőségekkel, hanem csak egyféle módon, t. i. úgy, ha felveszszük, hogy a mágneses térben van forgás, mely a fénymozgásokkal összetevődik.

Ezek voltak mindama jelenségek, melyek egészen a legújabb időkig, a fény és az elektromágnesség kölcsönhatásairól szóló ismereteinknek alapját képezték. Az említett kisérletekben a fényforrás a mágneses téren kivűl állott és csak a sugárzás haladt a téren keresztül. De világos, hogy magát a fényforrást is a mágneses térbe állithatjuk és a kibocsátott sugárzást vizsgálhatjuk. Már maga Faraday is megpróbálkozott e feladattal, de hosszas fáradozása daczára sem birt valami változást megfigyelni. A kisérleteket mások is ismételték, azonban siker nélkül; végre 1897-ben Zeemann, fiatal holland tudós, igen nevezetes jelenségeket észlelhetett. Hogy e kisérlet neki sikerült, az ő ügyességén kívül, annak is tulajdonitható, hogy ma már jóval erősebb mágneses teret birunk előállitani, mint FARADAY korában, de annak is, hogy az elméleti kutatások a kisérletekkel karöltve haladnak. Az elmélet az ismeretes jelenségeket összekapcsolja és ezek alapján nemcsak új jelenségeket jósolhat meg, hanem meg is mutatja azt az utat, melyen azok keresendők. Így történt a jelen esetben is. ZEEMANN a mágneses térbe natriumlángot állitott és a kijövő sugárzást spektroszkóppal észlelte s azt tapasztalta, hogy a jellemző szinképi vonalak *megszélesednek*. Ugyane jelenség más lángoknál is előállott.

E kisérleti tényre támaszkodva maga ZEEMANN, továbbá LORENTZ és LARMOR a kérdést elméleti vizsgálat alá vonták és *a priori* arra a nevezetes eredményre jutottak, hogy a szinképi vonalaknak nemcsak szélesedniök, hanem több részre is kell oszolniok, nevezetesen az erővonalak irányában vizsgálva két részre, az erővonalakra merőleges irányban vizsgálva pedig három részre; vagyis az eredeti egy vonalból — pl. a natrium D_1 vonalából — az egyik irányban *kettős*, a másik irányban pedig *hármas* vonalnak kell létrejönnie (4. ábra). Ezt mondta az elmélet, de még többet is tett; megmondta, hogy a kettős vonalak két ellentett körrezgésnek felelnek meg, a hármas vonalak pedig sikrezgésekből származnak, a középsőnek megfelelő rezgések az erővonalak irányában, a két szélsőnek megfelelők pedig az erővonalakra merőleges sikokban mennek végbe.

Az elméleti vizsgálódások tehát az utat is megmutatták, melyen a kisérleteket folytatni kellett. A használt mágnesi térnél az eredeti vonalak csak megszélesedtek, de nem váltak szét. Vajjon a megszélesedett vonalban csakugyan két, illetőleg három rezgés esett-e össze? Könnyű volt erről meggyőződni. Hiszen az erővonalakra merőleges vizsgálódás esetén az elmélet szerint abban a megszélesedett vonalban oly három vonal esik össze, melyek közül a két szélsőnek rezgés sikja merőleges a középsőére. Alkalmasan elhelyezett Nicol-hasábbal a rezgések egyik vagy másik fajtáját ki lehetett zárni. ZEEMANN ily módon meggyőződött arról, hogy az elmélet következtetései tényleg helyesek. S miután így megerősödött ama hitében, hogy jó úton jár, világos volt előtte az is, hogy ha a tér intenzitását növeli, akkor a vonalaknak az elmélet követelte teljes szétválását is előállíthatja. Ez is sikerült neki, mikor a tér intensitását 22000 *CGS* rendszerbeli egységig megnagyobbította. Kisérleti tényei a következők:

1. Ha a fényforrást a mágneses erővonalak irányában nézzük, minden színképi vonal kettős vonalra esik szét. Csillám-lemezekkel való vizsgálatból kiderült az is, hogy mindegyik vonalnak körrezgések felelnek meg, melyek iránya ellenkező.

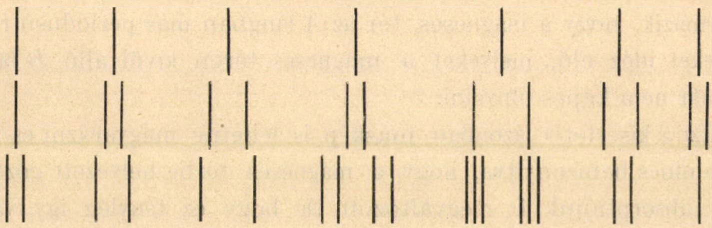


4. ábra.

2. Ha a fényforrást az erővonalakra merőleges irányban tekintjük, minden színképi vonal hármasra esik szét. Nicol-hasábokkal való vizsgálatból kiderült, hogy a hármas mindegyike síkrezgés; a középső rezgési iránya megegyezik az erővonalak irányával, a két szélső rezgései pedig oly síkban mennek végbe, mely merőleges az erővonalakra.

Tapasztalta továbbá, hogy a hármas középső vonala megmaradt ama helyen, melyen az eredeti, szét nem oszlott vonal volt és hogy úgy a kettős, mint a hármas szélső vonalai ugyanazon *d* értékkel tolódtak el jobbra és balra az eredeti iránytól. Tapasztalta még, hogy a szétválás nagysága, a *d* annál nagyobb, minél erősebb a mágnesi tér. Valóban Preston, dublini tanár 30,000—40,000 *CGS* rendszerbeli térintensitással az elválasztást annyira vitte, hogy a vonalak fotografálhatókká váltak.

Az igen erős mágneses térben azonban más jelenségek is léptek fel. Nevezetesen a hármas helyett gyakran négyesek, hatosok, nyolczasok jelentkeztek. Általában, ha a fényforrást az erővonalakra merőleges irányban nézzük, mindig a vonalak egész rendszerét nyerjük, mely áll egy középső és két szélső részből. Maga a középső rész egy vagy több vonalból állhat, melyek mind párhuzamos sikokban végbemenő síkrezgésekből származnak. A szélső részek mindegyike szintén több vonalból állhat, melyek valamennyien síkrezgések, de ez a sik a középső részek síkjára merőleges. Az 5. ábrában a felső sorban az eredeti, szét nem oszlott vonalak láthatók, a középső sorban a szétoszlás középső részei, az alsó sorban pedig a szélső részek megfelelő vonalai vannak feltüntetve.



5. ábra.

Az 1. a normális hármas, a 2. négyes, a 3. másik fajta négyes, a 4. hatos és így tovább.

Mindeme észlelések lényege röviden következőképen mondható ki: *A mágneses térbe helyezett fényforrás az eredeti ismert vonalak helyett más és több vonalból álló fényt bocsát ki.* A jelenségnek keletkezését pedig így állíthatjuk magunk elé: midőn valamely anyag világít, akkor legkisebb részecskéi meghatározott periodussal biró rezgéseket végeznek; midőn a világító anyag mágneses térben áll, akkor legkisebb részecskéi több más fajta és más periodussal biró rezgéseket végeznek.

Hogy az egyes eredeti rezgésekből minő új rezgéseknek kell keletkezniök, annak egyelőre nincs általános törvénye. Ugyanazon anyag különböző vonalai nem oszolnak fel egyformán s különböző anyagoknak a színkép ugyanazon részébe eső vonalai sem mutatnak egyöntetűséget.

Nyilatkozik-e a ZEEMANN-féle jelenség a színkép megfordításáról szóló elv alapján az absorptiós színképben is? Ismeretes, hogy — röviden mondva — az anyagok gőzei ugyanolyan rezgés számú sugarakat nyelnek el, a milyeneket maguk is kibocsátanak. Ismeretes továbbá az ezen tétel bebizonyítására szolgáló igen egyszerű kisérlet is. Ha egy fényes, széles és egyszínű A láng elé egy másik keskenyebb, ugyanolyan színű B lángot állítunk, akkor a B láng szélei sötétek lesznek. Természetes, mert az A lángból jövő, egyszínű sugarak a B láng szélein kitörő gőzökben absorptiót szenvednek. COTTON az A lángot mágneses térbe helyezte és azt tapasztalta, hogy a B fekete szélei eltűntek. Ez a jelenség onnét származik, hogy a mágneses tér az A lángban más periodusú rezgéseket idéz elő, melyeket a mágneses téren kívül álló B láng immár nem képes elnyelni.

Ezt a kisérletet azonban máskép is lehetne magyarázni és így vele nincs bebizonyítva, hogy a mágneses térbe helyezett gőzöknek absorptiójuk is megváltozott. De hogy ez tényleg így van, vagyis hogy a mágneses tér a ZEEMANN-féle jelenség értelmében a gőzök absorptióját is módosítja, azt magának ZEEMANNnak, továbbá KÖNIGnek kisérletei is mutatják. Ennek kimutatására az elektromos ívlámpa folytonos színképét adó fényét mágneses térbe helyezett natriumlángon kell átvezetnünk, azután ROWLAND-féle rácscsal ellátott spektroszkóppal megvizsgálnunk. Ha a tér nincs gerjesztett állapotban, akkor megjelenik a natrium két jellemző, egymáshoz nagyon közel eső D_1 és D_2 absorptiós vonala; ha most a mágneses teret előállítjuk, akkor mindegyikből kettős vagy hármas *fényes* vonal jön létre a szerint, a mint az erővonalakkal párhuzamos, vagy azokra merőleges irányban vizsgáljuk a sugárzást. A tényleges kisérletnél természetesen kettősen törő prizmákat és negyedhullámos csillám-lemezeket kell használnunk, hogy a vonalaknak megfelelő rezgések természetét kikutathassuk. A jelenség magyarázatára meg kell jegyeznünk, hogy a natriumfényben, mely a mágneses térben van, létrejön kétféle irányú, u. m. jobb és balfelé forgó körrezgés; a jobbfelé forgó körrezgés a ráeső fény jobbra rezgő komponenseit nyeli el, de a balra rezgőket átbocsátja; viszont a balfelé tartó körrezgés a balra rezgő komponenseket nyeli el, az ellenkező irányúakat pedig átbocsátja. Ha tehát ezt a sugárzást kettősen törő prizmával és csillámlemezzel vizsgáljuk (a mely eszközökkel a körrezgéseket általában vizsgálni szokás), akkor majd a *bal*, majd pedig a *jobb*felé tartó körrezgést látjuk a szerint, a hogy a készüléket forgatjuk. Az ilyen módon észlelt vonalak ugyanakkora eltolódást mutatnak, mint a direct, emissiós vizsgálatnál.

Hasonló eredményre jutottak Righi, továbbá Macaluso és Corbino, kik az elektromos ívlámpa fényét először síkrezgéssé alakították át és csak azután vezették a mágneses térbe helyezett natriumlángon keresztül. E kisérleteknél azonban a színképi vonalak nemcsak Zeemann-féle szétoszlást szenvedtek, hanem a rezgési sík bizonyos szöggel el is fordult.

Más tényeket is említhetnék még, melyek szintén mutatják azt a jelentős változást, melyet a fény a mágneses térben szenved. De azt hiszem, hogy a felsoroltak is elegendő alapot nyujtanak arra, hogy képet alkossunk magunknak ama mélyreható összefüggésről, mely a mágneses-elektromos jelenségek és a fényjelenségek között fennáll. Az eddigiekből annyi bizonyos, hogy egészen más az a fényrezgés, melyet a részecske mágnességtől ment és más az, melyet mágneses térben végez.

Miképen magyarázza az elmélet a szóban forgó tüneményeket? Önök tudják, hogy a midőn azt mondom «elmélet», nem gondolhatok egyetlen, végleges, kikristályosodott elméletre, mert ilyen nincs. De vannak «elméletek». Maxwell után s részben az ő hatása alatt az elméletek egész sora keletkezett, melyek az elektromágnesség és a fény kölcsönhatásait különböző mechanikai szerkezetekkel igyekeztek megmagyarázni és ez nekik többé-kevésbbé sikerült is. Elméleteket állítottak fel: Goldhammer, Drude, Leathem, Wind, Kolaček, Larmor, Lorentz stb. A mint Zeemann kutatásainak eredményei ismeretesekké váltak, mindegyik igyekezett azokat saját rendszerével megmagyarázni. A jelen rövid referátum nem foglalkozhatik valamennyivel. Nem is volna czélja. Leginkább az a rendszer bír érdekkel, mely ZEEMANNnak az ő kutatásainál alapul szolgált, őt kisérleteinél vezette s a szóban forgó tüneményeket előre megjósolta. Ez pedig LORENTZ elmélete, mely külön könyvben is megjelent.* A következőkben igyekezem ezen elméletnek tárgyamra vonatkozó lényegét előadni.

LORENTZ az összes molekulákról felteszi, hogy elektromos töltéssel birnak. Ez az elektromosság és a molekula elválaszthatlanul össze van kapcsolva, az eloszlás sohasem változhatik s a töltést sem nagyobbítani, sem kisebbíteni nem lehet. Mikor tehát azt mondjuk molekula, akkor a felfogás alapján azt az elektromos mennyiséget épúgy hozzá kell értenünk, mint a tömegét. Az elektromos töltés és a tömeg az a két jellemző mennyiség, melyek a molekulát teljesen meghatározzák és minden más fajta molekulától megkülönböztetik. Ezt a felfogást tekintetbe véve nevezzük e molekulákat *jónok*nak.

Minden változás, mely az elektromos térben történhetik, a jónok helyváltozásaiból és az ætherre való hatásukból magyarázandó. Az æthernek azonban semmi más szerepe nincs, mint hogy az elektromos hatásokat továbbítsa.

A közönséges vezetésbeli elektromos áram, mely pl. egy drótban folyik, nem egyéb mint a jónok tényleges vándorlása a drótban épúgy, mint az elektrolytben. Az elektrostatikai tér úgy jön létre, hogy a jónok bizonyos kis távolságra eltolódnak.

Ezek a szükséges alapfeltevések, melyekből LORENTZ az elektrostatikai tér összes jelenségeit le tudja vezetni. Az elektromágneses tér számára a MAXWELL-féle alapegyenleteket majd minden változtatás nélkül elfogadja.

Minket azonban kiválóan a fényjelenségek érdekelnek. Mi történik a világitó testben? A jónok szakadatlan mozgást végeznek, mi közben természetesen magukkal viszik az elektromos töltést is. De mikor a jón mozgást végez, akkor maga körül elektromágneses teret teremt. Hogyan értsük ezt? Úgy, hogy a közegben mozgásával

* LORENTZ: Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen etc. Leiden, 1895.

erőket ébreszt. Ezen erők általában kétfélék: 1. elektromos erők és 2. mágneses erők. LORENTZ egész törekvése oda irányult, hogy ezen erőket meghatározza. Kiindulási pontjául választotta az elektromágneses térre érvényes MAXWELL-HERTZ-féle egyenleteket és ezekből igyekezett azon erők nagyságát levezetni. Mindenekelőtt az ébresztett mágneses erőkre kimutatja, hogy azok hatása elhanyagolható. Okoskodásának lényege a következő: A mozgó jón mágnesi hatás szempontjából helyettesíthető egy elemi árammal, melynek intensitása arányos az amplitudóval. De viszont maga az ébresztett mágnesi erő is arányos az amplitudóval. A BIOT-SAVART-féle törvény értelmében azonban a mágneses erőnek az áramra való hatása arányos magával a mágneses erővel és az intensitással; minthogy mindkét utóbbi mennyiség az amplitudóval arányos, azért a mozgó jónra való hatás az amplitudó négyzetével arányos. Az amplitudo igen kicsiny lévén, e hatás egészen elhanyagolható.

Marad az elektromos erő, mely két részből áll: az állandó elektrostatikai erő és a mozgó jón sebességéből származó erő. Az első a mozgási egyenletben nem szerepelhet, az utóbbiról felteszi, hogy a sebességgel és magasabb idő szerinti quotiensekkel arányos. Ha xyz az elmozdulás komponenseit jelentik, akkor ezen erő X tengely szerinti komponense

$$-\left[a\frac{dx}{dt}+b\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{d^3x}{dt^3}\right],$$

és hasonló két kifejezés az Y és Z tengelymenti komponensekre; abc állandók.

A mozgó jónra hat rugalmas erő is, mely eredeti helyébe vissza akarja vinni; ez az erő arányos az elmozdulással, tehát komponensei

$$-k^2x, \quad -k^2y, \quad -k^2z,$$

a hol k^2 bizonyos állandó.

Ha tehát a jón tömegét m-mel jelöljük, akkor a mozgási egyenletek:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x-\left[a\frac{dx}{dt}+b\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{d^3x}{dt^3}\right]$$

és analog két kifejezés y és z-re. Az előbbeni egyenlet megoldását

$$x = Ce^{-\mu t} \cos \lambda t$$

kifejezés állítja elő. A mozgás tehát csillapodik épúgy mint a csillapított inga lengései. De kell is hogy csillapodjék, hiszen energiát ad át a környezetnek. A csillapodás arányos

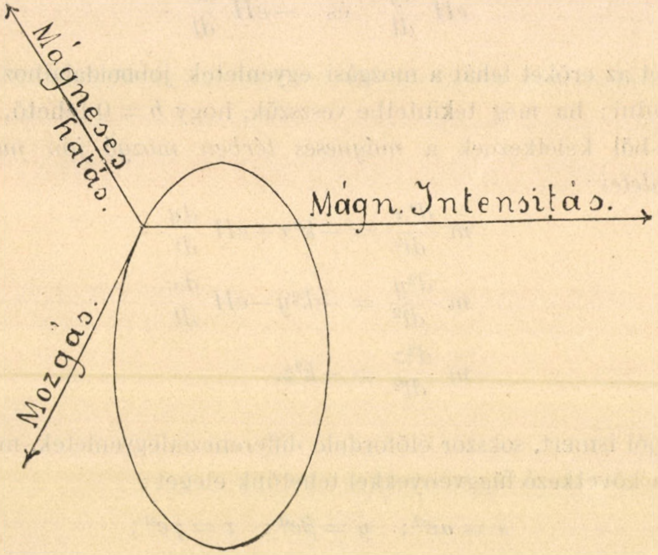
$$a\frac{dx}{dt} + c\frac{d^3x}{dt^3}$$

tagokkal. Minthogy a csillapodás nagyon csekély, azért e tagok egyszerűen elhanyagolhatók. Ezt tekintetbe véve és kis átalakitás után a mozgási egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} (b+m)\frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2x, \\ (b+m)\frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2y, \\ (b+m)\frac{d^2z}{dt^2} &= -k^2z. \end{aligned} \qquad \text{I)}$$

De ezen egyenletek csak akkor érvényesek, mikor a jón közönséges térben mozog, melyben nincs mesterségesen előállított mágneses erő. Látjuk továbbá azt is, hogy a b együttható mit jelent. Jelenti azon æther tömegét, melyet a mozgó jón magával ragad. LORENTZ felfogása értelmében ez csak igen kis mennyiség lehet; mert szerinte az æther a mozgásokban lehetőleg nem vesz részt. E felfogására hosszú számitások vezették, melyeket különösen az aberratio jelenségekre vonatkozólag végzett. Így tehát $b = 0$ tehető. A mozgó jón teljesen olyan mozgást végez, mint egy anyagi pont, melyre centralis, a kitéréssel arányos erő működik. A mozgás pályája általában véve ellipsis. Ez volt az a suppositio, melyből LARMOR kiindult és melynek alapján ugyanolyan eredményre jutott mint LORENTZ.

Ha külső erő nem működik, akkor a jón nyugodtan tovább kering az ő pályáján és az ætherben hullámokat kelt, melyek létrehozzák a fényt. Azonban megváltozik a dolog, ha külső erők is fellépnek. A külső erők megteszik a maguk hatását: a pálya zavargást szenved, épúgy mint a bolygók pályája, mikor egy másik égi test vonzása érezhetővé válik. A külső erő, mely a jónra hat, csak mágneses erő lehet. Úgy valósítható meg, hogy a mozgó jónt mágneses térbe helyezzük. Itt már nem mozoghat szabadon, mert elektromos töltést hord. Tapasztalati tény, hogy a mágneses tér-



6. ábra.

ben az elektromos testre erő működik, mely a tér intenzitásából származik.

Mi ezen erő természete? Nem ismeretlen előttünk; úgy iránya, mint nagysága meghatározható (6. ábra). Az Ampère-féle szabály szerint iránya merőleges úgy a mozgás sebességének irányára, mint a mágneses tér intensitásának irányára. A nagyságát a Biot-Savart-féle törvénynek alkalmazásával határozhatjuk meg. Képzeljük, hogy az e töltéssel biró jón Δs útat tesz meg Δt idő alatt, akkor rá ugyanakkora erő hat, mint oly áramelemre, mely Δs hosszú s melynek intensitása $i = \frac{e}{\Delta t}$. Az említett törvény szerint a hatás $= Hi\Delta s$, a hol H a mágneses tér intensitása, tehát a jelen esetben (ha a Δ helyett a differencziálás jeleire térünk át, e és H állandó) ez az erő $= eH\frac{ds}{dt}$. Ha a koordinatarendszert úgy választjuk, hogy a Z tengely beleessék a mágneses erő intensitásának irányába, akkor a tekintetbe vett ponderomotorikus erőnek csak az XY síkban lesznek komponensei és pedig az X, illetőleg Y tengely mentén:

$$eH\frac{dy}{dt} \quad \text{és} \quad -eH\frac{dx}{dt}.$$

Ezeket az erőket tehát a mozgási egyenletek jobboldalaihoz hozzá kell adni; ha még tekintetbe veszszük, hogy $b = 0$ tehető, akkor az I)-ből keletkeznek a *mágneses térben mozgó jón mozgási egyenletei:*

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2x + eH\frac{dy}{dt} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2y - eH\frac{dx}{dt} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -k^2z. \end{aligned} \qquad \text{II)}$$

Igen jól ismert, sokszor előforduló differencziálegyenletek, melyeknek a következő függvényekkel tehetünk eleget:

$$x = ae^{st}; \quad y = \beta e^{st}; \quad z = \gamma e^{st}; \qquad 1)$$

a hol a, β, γ állandók, az itt szereplő e a természetes logaritmusok alapszáma, s pedig $s = \sqrt{-1}\cdot\frac{2\pi}{T}$ összefüggés alapján a periodust, T-t határozza meg. Látjuk tehát, hogy a jón mozgásának x és y tengelyek menti vetületei a csillapitott inga lengéseinek felelnek meg, a z tengelymenti vetület pedig megmarad egyszerű harmonikus mozgásnak.

Minket a periodus T érdekel legjobban. Ennek meghatározására az 1) alatti függvényeket helyettesitsük a II) alatti rendszerbe, akkor az s, illetőleg általa a T meghatározására következő egyenleteket kapunk:

$$\begin{aligned} ms^2a &= -k^2a + eHs\beta \\ ms^2\beta &= -k^2\beta - eHsa \\ ms^2\gamma &= -k^2\gamma. \end{aligned} \qquad 2)$$

Ha ezen egyenletekben $H=0$ teszünk, akkor megkapjuk a jón lengéseinek periodusát a mágnességtől szabad térben, mely, a mint rögtön látható

$$\sqrt{-1}\,\frac{k}{\sqrt{m}}=\sqrt{-1}\cdot\frac{2\pi}{T}$$

összefüggésből határozható meg. E szerint

$$T=\frac{2\pi\sqrt{m}}{k}. \tag{3}$$

Ugyanezen periodusa van a Z tengelymenti mozgásnak a mágneses térben is. A Z tengelymenti mozgás periodusa tehát a mágneses térben nem változik. Ha a 2) alatti egyenletekből az α, β, γ állandókat kiküszöböljük, akkor az s számára a meghatározó egyenletet kapjuk meg, melyből megközelítőleg

$$s_{1,2}=\sqrt{-1}\cdot\frac{k}{\sqrt{m}}\left(1\mp\frac{eH}{2k\sqrt{m}}\right)$$

és

$$T_{1,2}=\frac{2\pi\sqrt{m}}{k}\left(1\pm\frac{eH}{2k\sqrt{m}}\right).$$

A periodus tehát $\tau=\frac{eH}{2k\sqrt{m}}$ arányában változott meg; ha a 3) alatti kifejezést tekintetbe veszszük, akkor továbbá a $\tau=\frac{e}{m}\cdot\frac{HT}{4\pi}$. Az eredeti T periodusú mozgás helyett tehát három mozgást kapunk, melyeknek periodusai:

$$T(1+\tau),\quad T,\quad T(1-\tau).$$

Az egész jelenségről leghelyesebb képet úgy alkothatunk magunknak, ha a jón mozgását más három komponensre bontjuk fel, a mint az analytikai úton is megtehető. E három komponens:

1. Egyenes vonalú rezgés az erővonalakkal párhuzamosan. Erre nem hat a mágneses tér, periodusa tehát nem változik, marad T.

2. Körmozgás olyan irányban, melyben elemi elektromos áram folynék, mely a tért létre hozná és oly síkban, mely merőleges az

erővonalakra. Erre a mozgásra úgy hat a mágneses tér, hogy a mozgást gyorsítja; a periodus tehát $T(1-\tau)$.

3. Körmozgás az ellenkező irányban, de ugyanazon síkban. A mágneses térnek az a hatása van, hogy a mozgást lassítja. Periodusa tehát $T(1+\tau)$.

A jón rezgéseinek minő hatásuk van a külső ætherre? Kétségkívül hullámokat keltenek. De milyenek e hullámok? Önök előtt ismeretesek ama korszakalkotó kisérletek, melyeket Hertz az elektromos kisülés oscilláló természetének és e rezgések hullámszerű tovaterjedésének bebizonyítására végzett. A fémgömbökből álló szikrakeltőből (oscillator) elektromos rezgések indulnak ki, melyek a térben hullámok alakjában terjednek tovább. Hertz azt akarta tudni, minő az elektromos mozgás a kisméretű szikrakeltőtől bizonyos távolságban fekvő, tetszésszerinti pontban? E kérdést elméleti úton megoldotta s a következő eredményekre jutott:

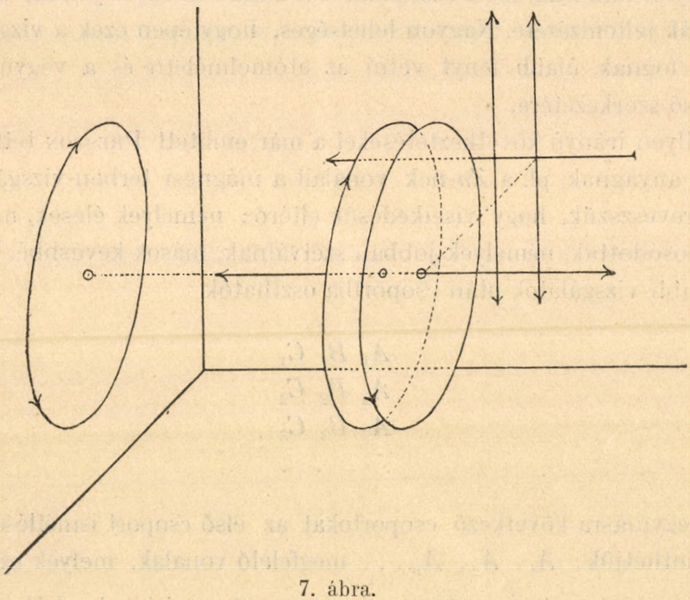
1. Messzebb fekvő pontokba az elektromos és mágneses perturbatiók síkhullámok alakjában jutnak.

2. A hullámsík merőleges azon egyenesre, mely a tekintetbe vett pontot a szikrakeltővel összeköti.

3. Az elektromos mozgást bármely hullámsíkban úgy kapom meg, ha az eredeti mozgást, mely a szikrakeltőben keletkezik, eme hullámsíkra a geometria törvényei szerint vetítem.

Ha most a szikrakeltő elektromos mozgását helyettesítem a jón mozgásával, akkor a továbbterjedés szempontjából analog — hogy azt ne mondjam, ugyanazon — viszonyokkal van dolgom. Valóban Lorentz, ki e számítást végre is hajtja, teljesen ugyanazon eredményekre jut. Így tehát, ha meg akarjuk tudni, hogy a jón rezgései egy tetszésszerinti távolabbi pontban minő hullámokat keltenek, nem kell egyebet tennünk, mint a jón rezgéseit a megfelelő hullámsíkokra vetíteni.

Ha tekintetbe veszszük, hogy a jón mozgása minő három komponensre bontható, akkor az előbb mondottakból rögtön következik, hogy az erővonalakkal párhuzamos irányban csak a két ellentett körrezgés észlelhető, melyeknek periodusai $T(1+\tau)$ és $T(1-\tau)$ (7. ábra). Az erővonalakra merőleges irányban ellenben három síkrezgés terjed tovább; a középsőnek periodusa marad T, a két szélsőé pedig ennél nagyobb, illetőleg kisebb, $T(1+\tau)$ illetőleg $T(1-\tau)$. Miután e rezgések mindegyike külön rezgésszámmal bir, azért a spektroszkópban szétválni kénytelenek. Az is látható, hogy a T rezgés az erővonalakkal párhuzamos irányban, a $T(1+\tau)$ és $T(1-\tau)$ rezgések pedig erre merőleges sikban mennek végbe. Zeemann eredményei tehát teljes igazolást nyertek. Követ-



7. ábra.

kezik továbbá, hogy ferde irányban két elliptikus rezgésnek és egy síkrezgésnek kell fellépnie, a mit újabb kisérletek szintén igazolnak.

Vajjon a négyeseket, hatosokat stb. is tudja-e igazolni az elméletet? Részletes vizsgálatok még hiányoznak. Lorentz kimutatja, hogy ha több különböző jón mozgását veszszük számításunk alapjául, akkor új alakzatok is léphetnek fel. A különböző jónok között nemcsak a mágneses zavaró erők lépnek fel, hanem olyanok is, melyek az anyag chemiai szerkezetétől függnek és akkor ezek az új erők is megteszik a maguk hatását és még újabb periodusú mozgások szülőokaivá válhatnak. Ha pl. a jón pályája valami oknál fogva a saját síkjában forog, akkor minden vonal kettőre oszlik fel, vagyis a merőleges irányban *hatos* jön létre.

A hármas rezgésszámai $n_1 = \frac{1}{T(1+\tau)}$; $n = \frac{1}{T}$ és $n_2 = \frac{1}{T(1-\tau)}$ az észlelési adatokból kiszámíthatók; tehát kiszámítható a τ numerikus értéke is, de ez egyenlő lévén $\frac{e}{m} \cdot \frac{HT}{4\pi}$-vel meghatározható az $\frac{e}{m}$ viszony is. Ilyen számítások elméleti szempontból nagyon fontosak, mert számadatokat adnak az egyes jónok, molekulák jellemzésére. Nagyon lehetséges, hogy épen ezek a vizsgálatok fognak újabb fényt vetni az atómelméletre és a vegyületek belső szerkezetére.

Ilyen irányú következtetéseket a már említett Preston tett. Ha egy anyagnak, pl. a *Zn*-nek vonalait a mágnesi térben vizsgáljuk, észreveszszük, hogy viselkedésük eltérő: némelyek élesek, mások elmosódottak, némelyek jobban szétválnak, mások kevésbbé. Pontosabb vizsgálatok után csoportba oszthatók

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Az egymásra következő csoportokat az első csoport ismétléseinek tekinthetjük; A_1, A_2, A_3 . . . megfelelő vonalak, melyek egyformán válnak szét, $\frac{e}{m}$ számára is ugyanazt az értéket adják, tehát valószínű, hogy egy fajta jón hozta őket létre. Ugyanez áll a *B*-kre és *C*-kre is, melyek ismét külön jónoktól eredhettek. A *Zn*-ben tehát három különböző jón lehet. A chemiailag rokon elemek, mint a magnesium, cadmium vonalai is teljesen azonos csoportokba oszthatók és pedig úgy, hogy e három elem *A* vonalai teljesen azonosan viselkednek; ugyanez áll a *B*-kre és *C*-kre is. Feltehetjük tehát, hogy e három elem *A* vonalait egyfajta jón hozta létre. És így tovább. E felfogás szerint a rokon elemek egyfajta jónokból volnának felépítve.

Az a gondolat tehát, hogy az összes elemek ugyanazon alap-anyagból vannak felépítve, újra kisért. Annyi bizonyos, hogy e spekulacziónak most már meg van a tudományos alapja. A fény és elektromágneses jelenségek kölcsönhatásainak ily messzemenő következményei lehetnek. Ha a fenti spekulaczio beválik, úgy a bölcsek kövének gondolatát a spektroszkóp valósítja meg.

Irodalom: Zeemann, Lorentz, Preston, Larmor, Righi, Cornu, Liénard, Poincaré, König, Cotton, Macaluso és Corbino, Becquerel stb. értekezései a Nature, Philosophical Magazine, Journal de Physique, C. R., Éclairage Électrique, Wiedemann Annalen és Naturw. Rundschau 1897., 1898. és 1899. évi számaiban.

Mikola Sándor.

MEGOLDOTT FELADATOK.

29. *Ha valamely kúpszelet körülirt háromszög A, B, C szögpontjának projectiói a kúpszelet tetszőleges pontjából a kúpszeletre A_1, B_1, C_1 és a BC, CA, AB oldalaknak érintési pontjai A',B',C', akkor*

$$(A_1B_1C_1D) \overline{\wedge} (A'B'C'D). \qquad \text{(Klug.)}$$

Első megoldás Szépréthy Béla főreáliskolai tanár úrtól Brassón.

Az $A'B'C'$ és D pontok a, b, c, d-vel jelölt érintői $abcd$-ben egy a kúpszeletnek körülirt négyoldalt alkotnak. E négyoldal valamely 1 2 3 4 5 6 Brianchon-féle hatoldal elfajulásának tekinthető.

Ha ugyanis

$$(a, d) \equiv F \text{ és } (c, d) \equiv E,$$

továbbá

$$\begin{array}{ll} (12) \equiv A & (45) \equiv D \\ (23) \equiv C' & (56) \equiv F \\ (34) \equiv E & (61) \equiv C \end{array}$$

akkor adja β_1 a megfelelő Brianchon-féle pontot, a melyben az

$$AD,\ C'F,\ EC$$

egyenesek találkoznak.

Más

$$\begin{array}{ll} (12) \equiv C & (45) \equiv D \\ (23) \equiv A' & (45) \equiv E \\ (34) \equiv F & (61) \equiv A \end{array}$$

megadott csoportosítás mellett β_2-ben jutunk megfelelő Brianchon-féle pontra, a melyben a

$$CD,\ A'E \text{ és } FA$$

egyenesek találkoznak.

Tekintettel arra, hogy a kúpszeleten fekvő négy pont csoportja a hozzátartozó érintők csoportjával projektiv, hogy továbbá négy érintő csoportja bármely érintőn vele projektiv pontcsoportot állapít meg, nyilvánvaló, hogy

$$(A'B'C'D) \,\overline{\wedge}\, (abcd)$$

és

$$(abcd) \,\overline{\wedge}\, (c\ abcd) \equiv (BAE'C).$$

Vetítsük e pontcsoportot F-ből BD-re, és legyen

$$(AF, BD) \equiv \gamma,$$

akkor

$$(F \cdot BAC'E) \,\overline{\wedge}\, (B\gamma\beta_1 D)$$

Ámde az így nyert csoport E-ből AF-re vetíthető, úgy, hogy

$$(E\ B\gamma\beta_1 D) \,\overline{\wedge}\, (A\gamma\beta_1 F).$$

Ez utóbbi pontcsoportnak D-ből a kúpszeletre való visszavetítése végre a

$$(D \cdot A\gamma\beta_1 F) \,\overline{\wedge}\, (A_1 B_1 C_1 D)\text{-re}$$

vezet. a mivel a tétel helyessége be van bizonyítva.

*

Második megoldás Tőtössy Béla műegyetemi tanár úrtól.

Legyenek a kúpszelet érintői az A', B', C', D' pontokban rendre a, b, c, d; az a, b, c metszése d-vel rendre A^*, B^*, C^*, végre a CD és c egyenesnek metszéspontja M, akkor

$$A'B'C'D' \,\overline{\wedge}\, abcd \,\overline{\wedge}\, A^*B^*C^*D \,\overline{\wedge}\, BAC^*M \,\overline{\wedge}\, B_1 A_1 D C_1 \,\overline{\wedge}\, A_1 B_1 C_1 D.$$

q. e. d.

Kimutatás

az 1900 január havában befolyt dijakról

Tagsági dijat fizettek :

1897. évre : Dózsa Jakab, 2 k. — Erdődy Imre, 10 k. — Korbuly Emil, 6 k. Összesen ... ... 18 kor.

1898. évre: Berkes Ottó, 6 k. — Schmidt János 4 k. Össz. 10 kor.

1899. évre : Dsida Ottó, 6 k. — Fertig Vilmos, 10 k. — Harkányi Béla br., 3 k. Hauszmann Alajos, 10 k. — Sinkovits Ferencz, 6 k. — Steindl Imre, 10 k. — Suták József dr., 10 k. Összesen ... ... 55 kor.

1900. évre : Bláthy Ottó, 10 k. — Bodola Lajos, 10 k. — Ferenczy István, 6 k. — Ilosvay Lajos, 10 k. — Inczédy Dénes, 6 k. — K. Kiss József, 6 k. — Lengyel Sándor, 10 k. — Pap János, 4 k. — Sinkovits Ferencz, 6 k. — Suták József dr., 10 k. Összesen ... ... 78 kor.

Előfizetési dijat fizettek :

1898—1899. évekre : a podolini kisgymn. — A temesvári fg. Összesen 2 à 20 k. ... ... 40 kor.

1899. évre : a pozsonyi k. kath. g. — A sz.-udvarhelyi fr. A sz.-udvarhelyi fg. — Trocsányi Endre. Összesen 4 à 10 k. ... ... 40 kor.

1900. évre: a bpesti VI. k. áll. g.—a dévai áll. fr.—a győri fr. — a hajduböszörményi ref. g. — a kaposvári fg. — a körmöczbányai fg. (6 k.) — a kecskeméti fr. — a pozsonyi k. kath. fg. — a soproni ág. ev. lyceum. — a soproni áll. fr. (6 k.) — a sepsi-szt.-györgyi Székely Mikó Coll. — a selmeczbányai nagy g. — a szamosujvári fg. — a szászvárosi ref. Kun Coll. — Trocsányi Endre. — Wokal János utóda — a zilahi ev. ref. fg. Összesen 15 à 10 k. ... 150 kor.

2 à 6 k. ... 12 kor.

Összesen befolyt:

Hátrálékokból ... ... 83 kor.

F. évi tags. dijakból... ... ... 78 kor.

Előfizetési dijakból ... ... 242 kor.

Bpest, 1900 febr. 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

A VÉGES CSOPORTOK ELMÉLETÉNEK ÚJABB IRODALMÁBÓL.

(Első közlemény.)

A véges csoportok elmélete a *szubsztituczió-csoportok* elméletéből fejlődött ki, a mely elméletnek alapjait Cauchy vetette meg. Miután már sok speczialis eredmény állott rendelkezésre, felmerült a törekvés, a véges csoportok elméletét egészen absztrakt alapon felépíteni. Számos más szerző mellett különösen Frobenius * és Hölder ** dolgoztak ebben az irányban. A már ismert alaptételeknek absztrakt módon való tárgyalása oly szempontokhoz vezetett, melyek révén lényeges új eredmények is adódtak. Jelen ismertető dolgozat ama nevezetesebb tételeket állítja össze, a melyek csak a csoport, vagy alcsoportjai rendjének számelméleti szerkezetétől függnek. A tárgyalás folyamában előforduló változtatásokra, valamint Frobenius tételeinek némely itt adott általánosításaira itt nem kivánok külön utalni.

I. A csoportról általában.

A véges csoport definicziója. Legyenek megadva a

$$H_0, H_1, H_2, \ldots, H_{n-1} \qquad 1)$$

elemek. Ezeknek megadása bármi módon, tehát tisztán fogalmilag

---

* Frobenius régebbi dolgozatai a *Crelle Journal*-ban (86, 100, 101. kötetekben), az újabbak a *Berliner Sitzungsbericht*-ekben (1893-tól fogva) jelentek meg.

** Hölder dolgozatai a *Math. Annalen*-ben (34., 40., 43., 46. k.) és a *Göttinger Nachrichten*-ben vannak. Kivülök számos, leginkább angol és amerikai szerző dolgozott a jelzett irányban.

is történhetik. Az 1) alatti elemek rendszere, akkor és csak akkor alkot n elemü vagy n-edrendű csoportot, ha a következő tulajdonságai vannak:

α) Definiálva van a szorzási törvény, még pedig oly módon, hogy a H_iH_k szorzat egyértelmű és ismét az 1) *alatti elemek közé tartozik, vagyis*

$$H_iH_k = H_l. \quad (i, k=0, 1, \ldots, n-1)$$

β) A szorzási törvény associativ.

γ) Ha X átfutja az 1) *alatti rendszer összes elemeit, akkor ugyanezen tulajdonsága van az*

$$XH_i,\ H_iX \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

szorzatoknak is.

Tüstént látni, hogy a *γ)* alatti követelmény teljesen egyenlő értékű a következővel.

γ') Az 1) *alatti rendszeren belül minden*

$$XH_i = H_k,\quad H_iX = H_k \quad (i, k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

lineár egyenletnek egy és csak is egy megoldása van.

Lássuk már most először is ama közvetetlen folyományokat, a melyek a csoport definicziójából adódnak. Először is *minden csoportnak van egy és csak egy eleme (főelem), mely a szorzásnál az egység jellegével bir.*

Ugyanis i adott értékénél az

$$XH_i = H_i$$

egyenletnek van egy és csak egy megoldása. Legyen ez:

$$X = E_1.$$

Erről az E_1 elemről ki fogjuk mutatni, hogy ha a szorzásnál az első tényező, akkor az egység jellegével bir. Ugyanis k tetszőleges értékénél γ) következtében H_l meghatározható úgy, hogy

$$H_k = H_iH_l$$

legyen, és így

$$E_1 H_k = E_1 (H_i H_l),$$

de β)-nál fogva

$$E_1 (H_i H_l) = (E_1 H_i) H_l = H_i H_l = H_k$$

azaz

$$E_1 H_k = H_k$$

és így állításunk csakugyan be van igazolva. Világos továbbá, hogy csakis egy E_1 elem lehetséges, mert különben a γ) alatti követelés nem volna kielégítve. Ugyane módon kimutatható, hogy létezik oly E_2 elem, mely a szorzásnál második tényezőnek alkalmazva ismét úgy viselkedik, mint az egység. Ilyen elem is csak egy van. Ki fogjuk már most mutatni, hogy

$$E_1 = E_2.$$

Ugyanis ezeknek az elemeknek fönt részletezett tulajdonságainál fogva

$$E_1 E_2 = \begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases}$$

és így α) következtében

$$E_1 = E_2.$$

Ez az elem már most a szorzásnál az egység jellegével bir. Sokszor E-vel jelöljük, ha pedig a H_i elemek között akarjuk elhelyezni, akkor az indexeket úgy választjuk, hogy

$$E = H_0$$

legyen.

A szorzás törvényének β) alatti tulajdonságából következik, hogy minden elemhez kommutativ elemek is tartoznak.

Igy pl. minden elem önönmagához kommutativ. Ennek folytán önként lép be a hatványnak a fogalma pozitiv egész számú kitevő mellett. Általában minden elem összes hatványaihoz kommutativ. A csoport véges voltából tüstént következik az is, hogy egy elem hatványai között csak véges számmal vannak különbözők. A hatvány fogalmát negativ egész számú kitevőkre is kiterjeszthetjük. Ugyanis H_i^{-1} alatt érteni akarjuk a

$$H_i X = E$$

egyenlet megoldását. E jelölés jogosult, mert a mint ki fogjuk mutatni, a

$$H_iX=E, \quad XH_i=E$$

egyenleteknek közös megoldásuk van. Ha ugyanis X a $H_iX=E$ egyenletnek megoldása, akkor β) folytán

$$XH_iX=X(H_iX)=X;$$

de az associativ törvény alapján XH_iX így is írható:

$$XH_iX=(XH_i)X,$$

tehát

$$(XH_i)X=X$$

és így γ') következtében

$$XH_i=E,$$

azaz X az $XH_i=E$ egyenletet is kielégiti, a mivel állításunk be van bizonyítva. Most már legyen:

$$H_i^{-m}=(H_i^{-1})^m$$

Mivel H_i, H_i^{-1} kommutativek, látnivaló, hogy H_i^{-m} a

$$H_i^mX=E$$

egyenletnek megoldása. E szerint

$$H_i^{-m}=(H_i^m)^{-1}$$

vagyis a hatványozás szabályai negativ kitevők esetében is érvényben maradnak. Minden elem negativ kitevőjű hatványaihoz is kommutativ. Végül bevezetjük még a zérus kitevőjű hatványt is; ez mindig a főelemet jelentse.

E jeleket használva a

$$H_iX=H_k \tag{2)}$$

egyenlet megoldása

$$X=H_i^{-1}H_k.$$

Az

$$XH_i=H_k \tag{3)}$$

egyenlet megoldása pedig

$$X=H_kH_i^{-1}.$$

Az 1) alatti elemek alkotta csoportot jelöljük röviden a $\mathfrak{H}$ betűvel. A benne foglalt elemek számát n-et nevezzük a csoport rendszámának. Ha az 1) alatti csoportból bizonyos számú elemet kiválasztunk, úgy ezek oly rendszert alkotnak, melyre nézve az α) alatti követelmény kielégitése már maga után vonja a β), γ) alatti feltételek teljesülését, a mit így fejezhetünk ki.

Egy csoport elemei közül kiválasztott elemek rendszere akkor és csak akkor alkot csoportot, ha közülök bármely kettőnek szorzata bennfoglaltatik az adott rendszerben.

Egy ily csoportot az eredeti csoport alcsoportjának nevezzük. (Minden csoport önönmagának alcsoportja.) Ha valamely tetszőleges elem összes pozitiv egész kitevőjű hatványait képezzük, úgy ezek az előbbi tétel értelmében csoportot alkotnak. De minden csoportnak van egységeleme, van tehát oly pozitiv m_i egész szám, melyre nézve

$$H_i^{m_i} = E. \tag{4}$$

A legkisebb pozitiv m_i szám, melyre a 4) egyenlet ki van elégítve, a H_i elem rendszáma. Ezen m_i szám egyszersmind az előbb tárgyalt alcsoportnak is rendszáma. Ennek az alcsoportnak különböző elemei ugyanis:

$$H_i, H_i^2, \ldots, H_i^{m_i-1}, H_i^{m_i}.$$

Az elem rendszámának fogalmából következik, hogy minden negativ kitevőjű hatványt ki lehet fejezni, mint pozitiv kitevőjű hatványt. Ugyanis

$$H_i^{-m} = H_i^{-m+dm_i}$$

d tetszőleges egész értékénél. Tehát d-t csak úgy kell választani, hogy

$$-m+dm_i>0$$

legyen. Ezt a következőképen foglalhatjuk össze:

Valamely elem összes hatványai alcsoportot alkotnak; ennek rendszáma megegyezik az elem rendszámával.

Valamely csoport alcsoportjainak rendszámairól ki fogjuk mutatni, hogy ezek a csoport rendszámának n-nek osztói.

E végből hozzuk be a *modulus fogalmát* (egyszerű modulus). Legyen $\mathfrak{G}$ valamely alcsoport. Szorozzuk ennek összes elemeit rendre a H_i elemmel és jelöljük az így nyert elemek rendszerét a

$$\mathfrak{G}H_i$$

szimbolummal. Most már könnyen bizonyíthatók be a következő tételek:

1. *Ha H_i a $\mathfrak{G}$ alcsoportnak eleme, akkor*

$$\mathfrak{G}H_i=\mathfrak{G}.$$

Ez közvetlenül a csoport definicziójából következik. Ugyanis $\mathfrak{G}H_i$ összes elemei különbözők és mindannyian $\mathfrak{G}$-ben előfordulnak.

2. *Ha H_i és H_k megadott elemek, akkor a*

$$\mathfrak{G}H_i,\ \mathfrak{G}H_k \tag{5}$$

rendszerek vagy csupa közös elemet tartalmaznak, vagy pedig egyik elemük sem közös. Az első esetben a H_i, H_k elemek (mod. $\mathfrak{G}$) kongruensek.

Ha ugyanis az 5) alattiakban van közös elem, akkor legalább egy ily egyenlőség található:

$$G_iH_i=G_kH_k,$$

a hol G_i, G_k a $\mathfrak{G}$ alcsoportnak elemei. Ha ennek az egyenletnek mindkét oldalát G_i^{-1}-nel baloldalról szorozzuk, lesz:

$$H_i=G_i^{-1}G_kH_k$$

és így

$$\mathfrak{G}H_i=\mathfrak{G}(G_i^{-1}G_kH_k),$$

de a csoport definicziójának β) és α) alatt felsorolt adataiból és az előbbi tételből közvetetlenül következik, hogy

$$\mathfrak{G}H_i=(\mathfrak{G}(G_i^{-1}G_k))H_k=\mathfrak{G}H_k,$$

a mivel állításunk be van bizonyítva.

3. *A $\mathfrak{G}H_i$ rendszer m elemet tartalmaz, ha m a $\mathfrak{G}$ rendszáma.* Következik a csoport γ) tulajdonságából.

Ugyanezek a tételek igazak akkor is, ha a

rendszerek helyett a
$$\mathfrak{G}H_i$$
$$H_i\mathfrak{G}$$

rendszereket vizsgáljuk. De látnivaló, hogy már most kétféle kongruenczia lesz (mod. $\mathfrak{G}$).

I. *Az előbb vizsgált rendszereket tartva szem előtt, a H_i elem akkor és csak akkor kongruens* (mod. $\mathfrak{G}$) *H_k-val, ha van oly $\mathfrak{G}$-beli elem: G, a melyre nézve*
$$H_i = GH_k.$$

Természetesen, ekkor
$$H_k = G^{-1}H_i,$$

s így H_k is kongruens (mod. $\mathfrak{G}$) H_i-vel.

II. *A $H_i\mathfrak{G}$ rendszerekből kiindulva pedig a következő definicziót adhatjuk. A H_i elem akkor és csak akkor kongruens* (mod. $\mathfrak{G}$) *H_k-val, ha G-nek van oly G eleme, melyre nézve*
$$H_i = H_kG.$$

Ekkor természetesen H_k is kongruens (mod. $\mathfrak{G}$) H_i-vel, mert
$$H_k = H_iG^{-1}.$$

Mindkét fajta kongruenczia esetében igaz a következő tétel.

Egy elemmel kongruens elemek egymás közt is kongruensek (mod. $\mathfrak{G}$). E tétel bebizonyitását, mely mindkét esetben hasonló módon történhetik, csak a II. esetre végezzük el. Legyen
$$H_i \equiv H_k \;(\text{mod. } \mathfrak{G})$$

és
$$H_i \equiv H_l \;(\text{mod. } \mathfrak{G}),$$

akkor található $\mathfrak{G}$-ben két elem G_1 és G_2 úgy, hogy
$$H_i = H_kG_1$$
$$H_i = H_lG_2$$

legyen, de akkor a
$$H_kG_1 = H_lG_2$$

egyenlőségből következő

$$H_k = H_l\,(G_2 G_1^{-1})$$

egyenlőség mutatja már, hogy

$$H_k \equiv H_l \;(\text{mod.}\ \mathfrak{G}).$$

A kétfajta kongruenczia közötti összefüggést a következő tétel adja meg.

Ha H_i kongruens H_k-val (mod. $\mathfrak{G}$) *az I. módon, akkor H^{-1} kongruens H_k^{-1}-nel* (mod. $\mathfrak{G}$) *II. szerint és fordítva.*

Ugyanis

$$H_i = G H_k$$

és mindkét oldalon a reciprok értékre térve át, lesz

$$H_i^{-1} = H_k^{-1} G^{-1},$$

a mivel a tétel be van bizonyítva.

Ha (mod. $\mathfrak{G}$) *az inkongruens elemek képviselői (I. szerint)*

$$R_0, R_1, \ldots, R_{j-1},$$

akkor a $\mathfrak{H}$ csoport összes elemei a

$$\mathfrak{G}R_0, \mathfrak{G}R_1, \ldots, \mathfrak{G}R_{j-1}$$

rendszerekben vannak elhelyezve. Minden elem csakis egy rendszerben és ebben is csak egyszer fordul elő.

Ez az 1), 2), 3) tételeknek következménye. Megjegyzendő, hogy az R elemek úgy választhatók, hogy

$$R_0 = E$$

legyen. Tételünket még következőképen is fogalmazhatjuk.

A $\mathfrak{H}$ csoportot szimbolikusan fel lehet bontani (mod. $\mathfrak{G}$) *a következő módon:*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}R_0 + \mathfrak{G}R_1 + \cdots + \mathfrak{G}R_{j-1},$$

a hol

$$R_0, R_1, \ldots, R_{j-1}$$

(mod. $\mathfrak{G}$) *az inkongruens osztályok képviselői (I. szerint).*

Ezen szétbontásból világos, hogy *ha $\mathfrak{G}$ rendszáma m, akkor m*

osztója a $\mathfrak{H}$ *rendszámának n-nek. Az*

$$\frac{n}{m}=j$$

hányadost az alcsoport indexének nevezzük.

Ha

$$S_0, S_1, \ldots, S_{j-1}$$

az inkongruens osztályok képviselői (mod. $\mathfrak{G}$) *(II. szerint), akkor:*

$$\mathfrak{H}=S_0\mathfrak{G}+S_1\mathfrak{G}+\cdots+S_{j-1}\mathfrak{G}.$$

A kétfajta kongruenczia közötti összefüggésnél fogva az inkongruens elemek a következő módon választhatók:

$$S_i=R_i^{-1},$$

a hol még megjegyezzük, hogy

$$S_0=R_0^{-1}=E^{-1}=E.$$

Bauer Mihály.

A KOMPLEX VÁLTOZÓ GAMMAFÜGGVÉNYÉRŐL.

(Negyedik és befejező közlemény.)

V. A gammafüggvény logaritmusa. STIRLING sora.

25. $\Gamma(x)$-nek szorzatalakjából világos, hogy a

$$-l.x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{x\,l.\left(1+\frac{1}{n}\right)-l.\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\}$$

sor, ha abban $l.$ a logaritmusnak főértéke, a gammafüggvény logaritmusának egyik értékét adja. E sor összegét $l.\Gamma(x)$ *főértékének* mondjuk, habár képzetes részében i együtthatója nem mindig esik $-\pi$ és π közé.

A következőkben $l.\Gamma(x)$ alatt mindig csak e főértéket értjük, állandónak vagy lineáris függvénynek logaritmusa alatt pedig annak az előbbi fejezetben megállapitott főértékét.

A $l.\Gamma(x)$-re nézve végzett vizsgálatok leginkább egy végtelen sorra vonatkoznak, mely e függvényt az $x=\infty$ hely környezetében aszimptotikusan ábrázolja, és rendesen STIRLING sorának neveztetik.*

Valamely $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *sorról akkor mondjuk, hogy* $F(x)$-et *aszimptotikusan ábrázolja, ha* n *minden értékénél*

$$\lim_{x=\infty} x^n\left(F(x)-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)=0. \qquad 34)$$

---

* Habár STIRLING-nél e sor mai alakjában még nem fordul elő. V. ö. CANTOR, Geschichte der Mathematik III., 629—630. l.

Még pedig a sort már akkor is aszimptotikusnak mondjuk, ha a 34) képlet csak a határátmenet bizonyos különös módjainál érvényes, pl. csak akkor, ha x a pozitiv számokon át növekedik minden határon túl.

Stirling sorának régibb levezetései arra az esetre szorítkoztak, midőn x valós része pozitiv. Csak 1889. közölt Stieltjes általánosabb bebizonyítást.* E bebizonyítással fejezem be dolgozatomat.

26. Hogy a sorbafejtésnek alapjául szolgáló képletre jussunk, hasítsuk végig a számsíkot az $x=0$ helytől a negativ számok mentén az $x=\infty$ helyig, és vizsgáljuk meg $l.\Gamma(x)$ magaviseletét e *metszetben*. Továbbá szerkeszszünk az előbbi fejezet végén bebizonyított tétel mintájára oly határozott integrált, mely e metszet mentén a $l.\Gamma(x)$-hez analog viselkedésű függvényt ábrázol.

A metszet kivételével

$$l.\Gamma(x) = -l.x + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{xl.\left(1+\frac{1}{n}\right) - l.\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\} \qquad 35)$$

az x-nek mindenütt folytonos függvénye. A metszetben x negativ *egész* számú értékeire nézve $l.\Gamma(x)=\infty$. A metszet egyéb helyein $l.\Gamma(x)$ magaviseletét következőleg határozhatjuk meg.

Legyen $a=-n+\xi$, hol n pozitiv egész számot jelent, és $0<\xi<1$. Továbbá rövidség kedvéért legyen

$$H_n(x) = -l.x + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{xl.\left(1+\frac{1}{k}\right) - l.\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}$$

és

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty}\left\{xl.\left(1+\frac{1}{k}\right) - l.\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}.$$

Az a hely környezetében $R_n(x)$ szabályosan viselkedik. Ellenben $H_n(x)$ más-más határértékhez közeledik, ha x a számsík felső, illetőleg alsó felében közeledik a-hoz. A logaritmus ismeretes tulaj-

---

* Sur le développement de log $\Gamma(a)$. Liouville, Journal des math., IV. série, tome V. A szóban forgó bebizonyítás az 1—9. czikkelyben foglaltatik.

donságainál fogva a két határérték különbsége:

$$\overset{+}{H_n}(a) - \overset{-}{H_n}(a) = -2n\pi i.$$

Tehát egyszersmind

$$l.\Gamma(\overset{+}{a}) - l.\Gamma(\overset{-}{a}) = -2n\pi i. \tag{36}$$

A $l.\Gamma(x)$ függvényről könnyen térhetünk át olyanra, hol a kétféle határátmenet különbsége a-nak periodikus függvénye. Ugyanis a

$$l.\overset{+}{a} - l.\overset{-}{a} = 2\pi i$$

képletből

$$(a-\tfrac{1}{2})\,l.\overset{+}{a} - (a-\tfrac{1}{2})\,l.\overset{-}{a} = -2\pi i(n+\tfrac{1}{2}-\xi).$$

Ennélfogva az

$$f(x) = l.\Gamma(x) - (x-\tfrac{1}{2})\,l.x \tag{37}$$

függvényre nézve

$$f(\overset{+}{a}) - f(\overset{-}{a}) = 2\pi i(\tfrac{1}{2}-\xi). \tag{38}$$

E különbség független n-től, tehát valóban a-nak periodikus függvénye.

27. Az előbbi fejezet végén bebizonyitott tétel mintájára könnyen szerkeszthetünk oly integrált, mely $f(x)$-hez analog viselkedésű függvényt értelmez. Ugyanis:

Ha

$$\underset{(0<t<1)}{\Phi(t) = \tfrac{1}{2} - t} \tag{39}$$

és

$$\Phi(t+1) = \Phi(t) \tag{40}$$

akkor

$$J(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{x+t}\,dt \tag{41}$$

az x negativ értékeinek kivételével mindenütt folytonos függvény. Ha pedig x a számsík felső vagy alsó felében az

$$a = -n + \xi \qquad (0<\xi<1)$$

negativ számhoz közeledik, akkor $J(x)$ mind a két esetben egy-egy *véges és meghatározott limeshez közeledik. De e két határérték nem egyenlő, hanem különbségük:*

$$\overset{+}{J}(a)-\overset{-}{J}(a)=-2\pi i\Phi(n-\xi)=-2\pi i\Phi(1-\xi)=2\pi i(\tfrac{1}{2}-\xi). \qquad 42)$$

E tétel az előbbi fejezetben mondottak után valószinű, de nem kétségtelenül bizonyos. Ugyanis sem $\Phi(t)$, sem az integrálás határai nem elégitik ki a mintául vett tétel feltevéseit.

Hogy szigorúan járjunk el:

α) bebizonyitjuk, hogy a negativ számok féltengelyének kivételével $J(x)$ mindenütt véges és meghatározott;

β) kiszámitjuk a $J(x)-f(x)$ különbséget. E külömbségről azt fogjuk találni, hogy x-nek líneáris függvénye, s ezzel tételünk be lesz bizonyitva.

28. Mindenek előtt egyszerűsítsük $J(x)$ értelmezését.

A 41) képlet értelmében

$$J(x)=\lim_{\omega=\infty}\int_0^\omega \frac{\Phi(t)}{x+t}\,dt.$$

Itt

$$\int_0^\omega \frac{\Phi(t)}{x+t}\,dt=\sum_{m=0}^{N-1}\int_m^{m+1}\frac{\Phi(t)\,dt}{x+t}+\int_N^\omega\frac{\Phi(t)\,dt}{x+t},$$

hol N az ω-nak egész számú része.

Ha ω eléggé nagy értékeire szoritkozunk, akkor az utolsó integrál határai közt $|x+t|>H$, hol H egy tetszőleges nagynak választható szám. Továbbá

$$-\tfrac{1}{2}\leq\Phi(t)\leq\tfrac{1}{2}.$$

Ennélfogva

$$\left|\int_N^\omega\frac{\Phi(t)\,dt}{x+t}\right|\leq\frac{1}{2}\,\frac{\omega-N}{H}$$

és

$$\lim_{\omega=\infty}\int_N^\omega\frac{\Phi(t)\,dt}{x+t}=0.$$

Tehát $J(x)$ értelmezését igy is fejezhetjük ki

$$J(x)=\lim_{N=\infty}\sum_{m=0}^{N-1}\int_m^{m+1}\frac{\Phi(t)\,dt}{x+t},$$

vagyis

$$J(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_m^{m+1}\frac{\Phi(t)\,dt}{x+t}. \tag{43}$$

Ezzel azt a kérdést, vajjon $J(x)$-nek mikor van véges és meghatározott értéke, egy sor összetartásának vagy széttartásának vizsgálatára vezettük vissza.

A nyert sort még az összetartás vizsgálatára alkalmasabb alakra is hozhatjuk. Ugyanis végezzük minden egyes tagjában a $t=m+t'$ helyettesítést. Akkor

$$J(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-t}{x+m+t}\,dt \tag{44}$$

hol egyszerűség kedvéért t' helyett ismét t-t irtunk.

Itt

$$\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-t}{x+m+t}\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}-t}{x+m+t}\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\frac{1}{2}-t}{x+m+t}\,dt,$$

s ha még a második integrálra a

$$t=1-t'$$

helyettesítést alkalmazzuk, akkor

$$\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-t}{x+m+t}\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}-t}{x+m+t}\,dt-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}-t}{x+m+1-t}\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2\left(\frac{1}{2}-t\right)^2dt}{(x+m+t)(x+m+1-t)}.$$

Vagyis

$$J(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2\left(\frac{1}{2}-t\right)^2dt}{(x+m+t)(x+m+1-t)}. \tag{45}$$

29. E sor összetartását külön bizonyitjuk be x pozitiv, és külön x-nek komplex értékeire nézve.

Ha x pozitiv értékű, akkor e sor minden egyes tagja szintén pozitiv. Továbbá az

$$(x+m+t)(x+m+1-t) = (x+m)(x+m+1) + t(1-t)$$

képletből t-nek pozitiv valódi tört értékeinél

$$(x+m+t)(x+m+1-t) < (x+m)(x+m+1).$$

Ennélfogva esetünkben $J(x)$ tagjai rendre kisebbek

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(x+m)(x+m+1)} \int_0^{\frac{1}{2}} 2\left(\frac{1}{2} - t\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(x+m)(x+m+1)} \qquad 46)$$

megfelelő tagjainál. E sor összetartó, és pedig összege: $\frac{1}{12x}$. Tehát a 45) alatti sor is összetartó, és $J(x) < \frac{1}{12x}$.

Ha x komplex értékű, akkor ily alakban állítható elő:

$$x = R(\cos\vartheta + i \sin\vartheta) = Re^{i\vartheta},$$

hol $R > 0$ és $-\pi < \vartheta < \pi$.

Ekkor a 45) alatti sor tagjai abszolut értékre nézve rendre kisebbek mint

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2(\frac{1}{2}-t)^2 dt}{|Re^{i\vartheta}+m+t|\,|Re^{i\vartheta}+m+1-t|}$$

megfelelő tagjai. A nevezőben $m+t$ és $m+1-t$ pozitiv számok. Ámde bármely b pozitiv szám esetében az

$$|Re^{i\vartheta}+b|^2 = (R\cos\vartheta + b)^2 + (R\sin\vartheta)^2 =$$

$$= R^2 + b^2 + 2Rb\cos\vartheta =$$

$$= (R+b)^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} + (R-b)^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} >$$

$$> (R+b)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$$

képletekből

$$|Re^{i\vartheta}+b| > (R+b)\cos\frac{\vartheta}{2}\,.$$

Tehát a 45) alatti sor tagjai abszolut értékre nézve rendre kisebbek mint

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2\,(\frac{1}{2}-t)^2\,dt}{(R+m+t)(R+m+1-t)}$$

megfelelő tagjai. De erről a sorról már tudjuk, hogy összetartó és hogy összege

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\,J(R).$$

Ennélfogva x komplex értékeinél a 45) alatti sor szintén összetartó. Továbbá

$$|J(x)| < \frac{1}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\,J(R) < \frac{1}{12R\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\,. \qquad 46)$$

A mondottakból nem csak az tünik ki, hogy x negativ értékeit kivévén $J(x)$-nek mindenütt véges és meghatározott értéke van, hanem az is, hogy

$$\lim_{x=\infty} J(x) = 0, \qquad 47)$$

feltévén, hogy x iránytényezőjének ϑ argumentuma a $-\pi+\delta$ és $\pi-\delta$ határok közt marad. Itt δ egy tetszőlegesen kicsinynek választható, de állandó pozitiv szám.

A ϑ-ra vonatkozó megszorításnak az a geometriai értelme, hogy x-nek nem szabad egy bizonyos, a negativ számok tengelyét közbe fogó, szögnek belsejébe esni. A szög egyébiránt tetszőlegesen kicsinynek választható.

30. Ha a 44) sorban x helyébe $(x+1)$-et irunk, akkor minden tag a reá következőbe megy át. Tehát

$$J(x)-J(x+1)=\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-t}{x+t}\,dt=(x+\tfrac{1}{2})\,l.\,\frac{x+1}{x}-1. \qquad 48)$$

E megjegyzés alapján meghatározhatjuk $f(x)$ és $J(x)$ különbségét.

Ugyanis az $f(x)$-nek 37) alatti értelmezéséből

$$f(x+1)=l\,.\,\Gamma(x+1)-(x+\tfrac{1}{2})\,l\,.(x+1)=$$
$$=l\,.\,x+l\,.\,\Gamma(x)-(x+\tfrac{1}{2})\,l\,.(x+1)$$

és

$$f(x+1)-f(x)=-(x+\tfrac{1}{2})\,l\,.\,\frac{x+1}{x}=J(x+1)-J(x)-1.$$

Innen

$$f(x+1)+x+1-(f(x)+x)=J(x+1)-J(x)$$

és

$$f(x+1)-J(x+1)+x+1=f(x)-J(x)+x.$$

Tehát a

$$\psi(x)=f(x)-J(x)+x \qquad 49)$$

függvényre nézve az egység a periodusnak jellegével bir.

E függvény értelmezésénél fogva m pozitiv egész számú értékeire nézve

$$\psi(x+m)-\psi(m)=$$
$$=l\,.\,\Gamma(x+m)-(x+m-\tfrac{1}{2})\,l\,.(x+m)-J(x+m)+x+m-$$
$$-l\,.(m-1)!+(m-\tfrac{1}{2})\,l\,.\,m+J(m)-m,$$

vagyis

$$\psi(x+m)-\psi(m)= \qquad 50)$$
$$=l\,.\,\frac{\Gamma(x+m)}{m^x(m-1)!}+x-(x+m-\tfrac{1}{2})\,l\,.\,\frac{x+m}{m}-J(x+m)+J(m).$$

Ha most m rendre felvesz minden egész számú értéket, akkor

$$\psi(x+m)-\psi(m)$$

a ψ periodikus voltánál fogva állandóan egyenlő a

$$\psi(x+1)-\psi(1)$$

különbséggel. Tehát egyszersmind

$$\lim_{m=\infty}(\psi(x+m)-\psi(m))=\psi(x+1)-\psi(1).$$

Továbbá a $\Gamma(x)$ függvény II) alaptulajdonságánál fogva

$$\lim_{m=\infty} l\,.\,\frac{\Gamma(x+m)}{m^x(m-1)!}=0.$$

Végre

$$\lim_{m=\infty}(x+m-\tfrac{1}{2})\,l\,.\,\frac{x+m}{x}=x\lim_{m=\infty}\frac{x+m-\frac{1}{2}}{m}\lim_{m=\infty}\frac{l\,.\left(1+\dfrac{x}{m}\right)}{\dfrac{x}{m}}=x$$

és

$$\lim_{m=\infty}J(x+m)=\lim_{m=\infty}J(m)=0.$$

Tehát az 50) alatti egyenletből, ha m minden határon túl növekedik, a következőt nyerjük:

$$\psi(x+1)-\psi(1)=0.$$

Szóval $\psi(x+1)$ és vele együtt

$$\psi(x)=f(x)-J(x)+x$$

az x-től független állandó. Azaz

$$f(x)-J(x)=C-x. \tag{51}$$

Ezzel a 27) alatti tétel be van bizonyítva.

31. Ha $f(x)$-et részletesen kiirjuk, akkor a mondottak szerint

$$l\,.\,\Gamma(x)=(x+\tfrac{1}{2})\,l\,.\,x-x+C+J(x).$$

Hogy e képlet teljes legyen, még a C állandó is meghatározandó. C nyilván valós értékű. Ezt tudván, irjuk x helyébe az ui képzetes számot és növeszszük u-t minden határon túl. Leszen

$$C=\lim_{u=\infty}\Re\left\{l\,.\,\Gamma(ui)-(ui-\tfrac{1}{2})\,l\,.\,(ui)-J(ui)\right\},$$

hol $\Re$ a zárjelbe foglalt kifejezés valós része. Itt a 23*a*) képletnél fogva

$$\Re\, l\,.\,\Gamma(ui)=\tfrac{1}{2}\,l\,.\,(2\pi)-\tfrac{1}{2}\,l\,.\,u-\tfrac{1}{2}\,l\,.\,(e^{\pi u}-e^{-\pi u}).$$

Továbbá

$$\Re\left\{\left(ui-\frac{1}{2}\right)l\,.\,(ui)\right\}=\Re\left\{\left(ui-\frac{1}{2}\right)\left(l\,.\,u+\frac{\pi}{2}\,i\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\,l\,.\,u-\frac{\pi u}{2}=-\,l\,.\,u-\frac{1}{2}\,l\,.\,e^{\pi u}.$$

Végre

$$\lim_{u=\infty} J(ui) = 0.$$

E szerint

$$C = \lim \left\{\tfrac{1}{2} l.(2\pi) - \tfrac{1}{2} l.(1-e^{-2\pi u})\right\} = \tfrac{1}{2} l.(2\pi).$$

Tehát végre

$$l.\Gamma(x) = (x-\tfrac{1}{2})\, l.x - x + \tfrac{1}{2} l.(2\pi) + J(x). \qquad 52)$$

E képletre, mely Bourguet-től származik, alapította Stieltjes a Stirling-ről nevezett sor levezetését. A régebben ugyane czélra használt képletekben $J(x)$ helyén oly integrál állott, mely csak a fél számsíkban birt értelemmel.

32. Ha $\Phi(t)$-t trigonometriai sorba fejtjük, akkor

$$J(x) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi t}{n\pi}\right) \frac{dx}{x+t}. \qquad 53)$$

Itt (t egész számú értékeinek kivételével):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi t}{n\pi}\right) \frac{1}{x+t} =$$

$$\frac{d}{dt}\Bigg[-\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi t}{2(n\pi)^2}\right)\frac{1}{x+t} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi t}{2^2(n\pi)^3}\right)\frac{1}{(x+t)^2} +$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi t}{2^3(n\pi)^4}\right)\frac{2!}{(x+t)^3} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi t}{2^4(n\pi)^5}\right)\frac{3}{(x+t)^4} -$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi t}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}\right)\frac{(2k-2)!}{(x+t)^{2k-1}}\Bigg] +$$

$$+(-1)^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi t}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}\right)\frac{(2k-1)!}{(x+t)^{2k}}.$$

Tehát

$$J(x) = \frac{B_1}{1.2x} - \frac{B_2}{3.4x^3} + \cdots +$$

$$+(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k-1)(2k)x^{2k-1}} + J_k(x), \qquad 54)$$

hol

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2}, \qquad B_2 = 4! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^3 (n\pi)^4}, \ldots$$

$$B_k = (2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1} (n\pi)^{2k}}$$

az első k BERNOULLI-féle szám, és

$$J_k(x) = (-1)^k (2k-1)! \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi t}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}} \right) \frac{dt}{(x+t)^{2k}}. \qquad 55)$$

33. Helyettesítsük a $J(x)$-re talált kifejezést 52) alatt, akkor

$$l.\Gamma(x) = (x-\tfrac{1}{2})\, l.x - x + \tfrac{1}{2}\, l.(2\pi) +$$
$$+ \frac{B_1}{1.2.x} - \frac{B_2}{3.4x^3} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1)(2k)x^{2k-1}} + J_k(x).$$

Ha itt $J_k(x)$-et elhagyjuk és k-t minden határon túl növesztjük, akkor az

$$(x+\tfrac{1}{2})\, l.x - x + \tfrac{1}{2}\, l.(2\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1)(2k)x^{2k-1}} \qquad 56)$$

sort nyerjük. Ezt nevezik STIRLING sorának.

E sor (habár a BERNOULLI-féle számok gyors növekedése miatt sehol sem összetartó) *$l.\Gamma(x)$-et aszimptotikusan ábrázolja.*

Ennek bebizonyítása végett meg kell vizsgálnunk, hogy menynyire közelíti meg

$$S_k(x) = (x-\tfrac{1}{2})\, l.x - x + \tfrac{1}{2}\, l.(2\pi) +$$
$$+ \frac{B_1}{1.2x} - \frac{B_2}{3.4x^3} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1)(2k)x^{2k-1}}$$

a $l.\Gamma(x)$-et.

A vizsgálandó

$$J_k(x) = l.\Gamma(x) - S_k(x)$$

különbség értéke

$$J_k(x) = (-1)^k \frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)x^{2k+1}} + J_{k+1}(x), \qquad 57)$$

a mi még így is irható:

$$J_k(x) = (-1)^k(2k+1)!\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1-\cos 2n\pi t}{2^{2k+1}(n\pi)^{2k+2}}\right)\frac{dt}{(x+t)^{2k+2}}. \tag{58}$$

Ha x pozitiv értékű, akkor az integrálás jele alatti függvény mindig pozitiv. Tehát $J_k(x)$ előjele: $(-1)^k$. E szerint 57) jobb oldalán két ellenkező előjelű tag áll, és közülök az elsőnek van nagyobb abszolut értéke. Ennélfogva esetünkben

$$|J_k(x)| < \frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)x^{2k+1}}. \tag{59}$$

Ha pedig

$$x = R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

akkor

$$|x+t| > (R+t)\cos\frac{\vartheta}{2}.$$

Tehát az 58) alatti képletből

$$J_k(x) = < \frac{(2k+1)!}{\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2k+2}}\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1-\cos 2n\pi t}{2^{2k+1}(n\pi)^{2k+1}}\right)\frac{dt}{(R+t)^{2k+2}},$$

vagyis

$$|J_k(x)| < \frac{|J_k(R)|}{\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2k+2}} < \frac{1}{\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2k+2}}\frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)R^{2k+1}}.$$

Ha most x a végtelenhez közeledik, akkor a vizsgált $J_k(x)$ különbség $(2k+1)$-ső rendű végtelen kicsiny lesz, feltévén, hogy ϑ a $\pi-\delta$ és $\pi+\delta$ határok közt marad. Itt δ egy tetszőlegesen kicsinynek választható, de állandó pozitiv számot jelent.

E szerint Stirling sora $l.\Gamma(x)$-et valóban aszimptotikusan ábrázolja.

34. Az x pozitiv értékeinél azt találtuk, hogy $J_k(x)$ előjelére nézve megegyezik $S_{k+1}(x)$ utolsó tagjával, abszolut értékre nézve pedig ennél kisebb.

Tehát *x pozitiv értékeinél $l.\Gamma(x)$ értéke az $S_k(x)$ és $S_{k+1}(x)$ összegek közé esik.*

Kürschák József.

A TESTEK HALMAZÁLLAPOTAIRÓL.

(Negyedik közlemény.)

19. §. *A hőokozta térfogatváltozás törvényei.*

A légnemű testek kiterjedésének menetét, legalább ideális érvényességben, a Gay-Lussac törvény fejezi ki (39. lap); mivel e kiterjedésnél, mint kitűnt, a nyomás igen lényeges változásokat idéz elő, a törvényt össze szokták kapcsolni a Boyle-Mariotte-félével (VIII. k. 383. lap). Ha a p és p_1 a nyomásokat jelentik, v és v_1 a hozzátartozó térfogatokat, akkor a Boyle-Mariotte törvényt így fejezhetjük ki:

$$p : p_1 = v_1 : v,$$

vagy más alakban:

$$pv = p_1 v_1 = \text{const.}$$

Ha továbbá v_0 és v_t a gáz térfogatai 0° és t°-nál, α a kiterjedési koefficziens, akkor Gay-Lussac szerint:

$$v_t = v_0 (1 + \alpha t),$$

miközben a nyomás állandóan p_0. Ha p_0 nyomást állandó hőmérséklet mellett p-re változtatjuk, akkor a térfogat v lesz s a Boyle-Mariotte törvény szerint:

$$pv = p_0 v_t = p_0 v_0 (1 + \alpha t).$$

(Boyle-Mariotte—Gay-Lussac törvény.)

Mivel Gay-Lussac szerint $\frac{1}{\alpha} = 273$, azért:

$$pv = p_0 v_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right);$$

a hőmérsékletet —273° C.-tól, az absolut zérusponttól számítva:

$$t = T - 273 \quad \text{és} \quad T = t + 273;$$

így:

$$pv = p_0 v_0 \left(1 + \frac{T-273}{273}\right) = \frac{p_0 v_0}{273} \cdot T = RT,$$

a hol

$$R = \frac{p_0 v_0}{273} = \text{constans}.$$

Ha T constans, akkor pv is az s megkapjuk a Boyle-Mariotte törvényt. Ha pedig T változik, akkor a két törvény egyesitése azt mondja, hogy pv arányos az *abszolut hőmérséklettel.*

A Gay-Lussac törvénynyel analog összefüggésre jut a *folyadékoknál* Mendelejeff, ki Thorpe-nak 47 különböző folyadéknál nyert kisérleti eredményeiből azon következtetésre jut, hogy a különböző folyadékoknak azon hőmérsékletei, melyeknél a folyadékok egyenlő térfogatúak, arányosak.* Pl.:

PBr_3 esetében

ha	$t = 10°$	$20°$	$30°$	$40°$
akkor	$v = 1{\cdot}00847$	$1{\cdot}01706$	$1{\cdot}02577$	$1{\cdot}03463$.

A higany ezen térfogatokat a következő hőmérsékleteknél éri el:

	$T = 46{\cdot}8°$	$93{\cdot}7°$	$140{\cdot}9°$	$189{\cdot}1°$,
innen:	$T:t = 4{\cdot}68$	$4{\cdot}68$	$4{\cdot}69$	$4{\cdot}72$.

Ezen törvényszerűséget Gay-Lussac-nak:

$$v = \left(1 + \frac{k}{n}\, t\right)^n$$

egyenletével fejezi ki; gázok esetében $n = +1$, folyadékoknál $n = -1$, tehát az egyenlet alakja:

$$v = (1 - kt)^{-1}.$$

A konstans k faktor minden folyadékra nézve karakterisztikus;

* Ann. ch. ph. (6) II, pag. 271; 1884. — Beibl. VIII, pag. 477; 1884.

ezen állandót *kiterjedési modulus*nak nevezi. Ennek értékét megadja a:

$$k = \frac{v_1 - v}{v_1 t_1 - vt}$$

képlet.

Más alakú egyenlet AVENARIUS-é:*

$$v = a - b \log (T - t),$$

a hol T a kritikus hőmérséklet, a és b állandók. Az egyenlet érvényességét æther, alkohol, kéndioxyd, diæthylamin és chloræthyl esetében igazolta.

A két egyenlet érvényessége felől a kisérletek igen eltérő eredményeket adnak. Egyrészt MENDELEJEFF 47 folyadékon tett kisérletek eredményeiből vonta le következtetéseit, de másrészt képleteinek helytelenségét mutatják ki BARTOLI és STRACCIATI.** Úgy látszik, hogy AVENARIUS egyenlete jobban megfelel a tényleges viszonyoknak; így elég nagy hőmérsékleti határok közt szép megegyezést talált az elméleti és kisérleti eredmények közt JONK.*** Mindkét formulának nagy hiánya, hogy a halmazállapotok változása körül nem használhatók. MENDELEJEFF maga megjegyzi, hogy a mint a GAY-LUSSAC-féle egyenlet csak ideális gázokra érvényes, úgy az övé csak ideális folyadékoknál használható. Az egyenlet mindig jobban elveszti érvényességét, a mint a folyadék a halmazállapotváltozáshoz közeledik. A kritikus hőmérsékletnél AVENARIUS egyenlete sem érvényes, mert itt $v = a + \infty$ lenne; azonban ezen ponthoz közel még mindig nagy a megegyezés a kisérleti és elméleti eredmények között, pl. diæthylaminnál 196·4°-ig ($\vartheta = 220^\circ$ körül), æthylchloridnál 160·1°-ig ($\vartheta = 182^\circ$ körül).

Elméleti megfontolásokból indul ki VAN DER WAALS; e megfontolásokból később lesz szó (III. rész), most csak a levont s idetartozó következtetését ismertetjük, melynek helyességét kisérleti adatokon próbálta meg. Azon eredményre jut, hogy *a kiterjedési*

* Beibl. VIII, pag. 806; 1884.
** Beibl. IX, pag. 510; 1885.
*** Berl. Ber. 1884. II, pag. 349.

koefficziens valamennyi folyadéknál ugyanaz, ha a számításban bizonyos feltételeket teljesítünk. Ha két test abszolut kritikus hőmérséklete T_1 és T_2, akkor a ϑ_1, ϑ_1' és ϑ_2, ϑ_2' abszolut hőmérsékleteket, melyekre a testeket hevitjük, úgy kell választani, hogy:

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ és } \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_2'} = \frac{T_1}{T_2}$$

legyen; továbbá térfogategység azon térfogat legyen, melyet a test a számítás kiinduló pontjában elfoglal. Pl. az æthert és a benzolt véve:

az æther abs. krit. hőmérséklete ... ... 463·0° C.
a benzol « « « ... ... 553·6° C.

az æthert 0°, 10°, 20° C. hőmérsékletekre hevítve, a megfelelő hőmérsékletek:

æther	benzol
$273+0=273°$ C.	$273 \cdot \frac{553{\cdot}6}{463} = 273°+53{\cdot}42°$ C.
$273+10=283$	$283 \cdot \frac{553{\cdot}6}{463} = 273 + 65{\cdot}38$
$273+20=293$	$293 \cdot \frac{553{\cdot}6}{463} = 273 + 77{\cdot}34$

u. i. a fönti egyenletekből:

$$\vartheta_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot \vartheta_1; \quad \vartheta_2' = \frac{T_2}{T_1} \vartheta_1'.$$

Megfelelnek tehát 0° és 53·42°, 10° és 65·38°, 20° és 77·34°. Ha most az æther térfogatnövekedését a 0—10° közben elosztjuk a 0°-nál levő térfogattal s a benzol térfogatnövekedését az 53·42—65·38° közben az 53·42°-nál levő térfogattal, ugyanazon számot kell kapni; épúgy a 10—20° közben. Pierre és Kopp kisérleti számadatai alapján ezen számok:

æther		benzol	
0—10°	0·01541	53·42—65·38°	0·01584
10—20°	0·01613	65·38—77·34°	0·01685.

A megegyezés igen jó, tekintve a kisérletek bizonytalan eredményeit a kritikus adatokra nézve.

A szilárd testeknél egy érdekes kisérleti eredményt említünk; a fémeknél u. i. Montigny (1877) és később de Heen (1879) azt találták, hogy a kiterjedési koefficziens s az abszolut olvadási hőfok szorzata állandó szám. Így de Heen szerint:

	Abs. olv. pont	Köbös kiterj.	Szorzat
Platina … … …	2373°	0 000029	68817
Palladium …	1973	35	69055
Vas… … … …	1873	36	67428
Arany … …	1523	46	70058
Réz… … … …	1373	51	70023
Ezüst … …	1273	57	72561
		Átlag … …	69567.

A kérdést mások nem vizsgálták meg s így végleges döntést nem mondhatunk róla. Az ily magas olvadáspontok meghatározása nem elég pontos és ezt tekintve, a szorzat elég állandó. Az összefüggés mindenesetre rámutat a kapcsolatra, mely a test kiterjedése és állapotváltozásának hőfoka közt van.

Ezen alapon de Heen kiszámította néhány test olvadáspontját, melyeket kisérletileg még nem határoztak meg. Így az osmium abszolut olvadásfoka 3276° C., a kobalté 1617° C., az aluminiumé 757° C.

20. §. *A testek sűrűsége.*

A testek kiterjedésével szoros kapcsolatban áll a sűrűség; ez u. i. a térfogategységben levő tömeg lévén, ha a test kiterjed s így ez a tömeg csökken, a sűrűség is kisebbedik. Ebből is kitűnik, hogy a mely körülmények a kiterjedésre befolyással vannak, befolyásolják a sűrűséget is.

A nyomás és a hőmérséklet legjobban a légnemű testek kiterjedésére hat, épigy a légnemű testek sűrűségére is. Ezen halmazállapotnál a kérdés közel kapcsolatban intézhető el a Boyle-Mariotte s a Gay-Lussac törvénynyel. A légnemű testeknél a sűrűséget többnyire az egyenlő nyomás alatt és hőmérsékleten levő levegő, vagy hydrogén sűrűségére vonatkoztatjuk. A sűrűség a térfogattal fordítva, tehát a nyomással egyenesen arányos; ha a Boyle-Mariotte törvény a maga szigorúságában érvényes, akkor a légnemű testek ezen relativ sűrűsége *a nyomástól és a hőmérséklettől független.*

A nem telitett gőzökre nézve több-kevesebb közelitéssel érvényes a Boyle-Mariotte törvény; minél nagyobb a törvény érvényességének foka, annál állandóbb a sűrűség. Tehát a kritikus hőmérséklet alatt a sűrűség jobban változik, ha a telitettség pontjához közeledünk s ezen ponton eléri az azon hőmérsékleten lehetséges legnagyobb sűrűséget; a kritikus hőmérsékleten felül a változás a hőmérséklet emelkedésével csökken s minél jobban távozunk a kritikus hőmérséklettől, a sűrűséget annál nagyobb megközelitéssel vehetjük állandónak.

A relativ sűrűség változásának egy másik oka a Gay-Lussac törvényének közelitő érvényességében rejlik. Mivel u. i. a különböző légnemek kiterjedési koefficziensei különbözők, a levegőre, vagy hydrogénre vonatkoztatott sűrűségek már ezért sem lehetnek állandók. Ez is lehet oka Hartmann eredményeinek, melyek szerint a relativ sűrűség, ha a nyomás állandó, a hőmérséklet emelkedésével fogy s mindig jobban közeledik a theoretikus értékhez; pl.:

æther (theor. ért. 2·557)	$t = 39{\cdot}7°$,	$d = 2{\cdot}649$
	$204{\cdot}5$	$2{\cdot}565$
viz (theor. ért. 0·622)	$t = 108{\cdot}8°$,	$d = 0{\cdot}653$
	$200{\cdot}2$	$0{\cdot}626$
eczetsav (theor. ért. 2·073)	$t = 128{\cdot}6°$,	$d = 3{\cdot}079$
	$254{\cdot}6$	$2{\cdot}135$.

Növekvő nyomás esetében a sűrűség akkor is növekszik, ha a hőmérséklet csökken.*

* Ber. chem. Ges. III; 1879. L. még Herwig, Pogg. Ann. CXXXVII; 1869. CXLI; 1870.

Az egyes isothermák mentén föllépő maximális sűrűséget az illető légnemű test akkor mutatja, mikor *a telítettség állapotába* lép. A telített gőz sűrűsége nem állandó szám, mert reá sem a BOYLE-MARIOTTE, sem a GAY-LUSSAC törvény nem alkalmazható, még közelítő érvényességgel sem; változása a hőmérséklet változásával egyenlő értelemben történik s maximális értékét a kritikus hőmérsékleten éri el.

Az idevágó kisérleti eljárások közül első sorban ANDREWS *isotherma methodusát* kell említeni; ennek lényege abban áll (VIII. k. 322. l.), hogy megfigyeljük a gőz viselkedését a BOYLE-MARIOTTE törvénynyel szemben. A mely pontban a törvény közelítő érvényessége megszünik, ott van a telités pontja. Megkapva ezt, nemcsak a gőznyomásokat mérhetjük meg, hanem a fajlagos térfogatot is s ennek reciprokja megadja a sűrűséget. Hogy ez a mód használható a kritikus sűrűség meghatározására, az eddigiekből világos.

CAILLETET és MATHIAS egy beosztott vas-üvegcsövet használtak, mely egy hengeres reservoirhoz volt forrasztva * s körül volt véve egy állandó hőmérsékletű folyadékot tartalmazó üveghengerrel. Ezen beosztott üvegcsőben először a nyomás fokozatos növelésével a gázt folyósitották, azután meggyőződvén arról, hogy a hőmérséklet teljesen állandó, igen lassan csökkentették a nyomást, míg a folyósitott gáz utolsó cseppje is eltünt. Ezen pillanatban feljegyezték a hőmérsékletet, a gőz térfogatát s a barometerállást; a gőz térfogatának s a szükségelt gáz súlyának ismerete közvetlenül megadja a keresett sűrűséget. Megvizsgálták a nitrogénoxydult ($-28{\cdot}0^\circ$ és $+33{\cdot}9^\circ$ közt), az æthylént ($-30{\cdot}0^\circ$ és $+8{\cdot}9^\circ$ közt) és a széndioxydot ($-29{\cdot}8^\circ$ és $+30{\cdot}2^\circ$ közt). Kisérleteik első sorban azon fontos eredményt adták, hogy a telített gőz sűrűségének és a hőmérsékletnek összefüggését graphikusan egy parabola ábrázolja s meg is adják ezen paraboláknak empirikus egyenleteit:

---

* C. R. CII, pag. 1202; 1886. — Journ. phys. (2) V, pag. 549; 1886.

nitrogénoxydul: $\delta = 0{\cdot}5099 - 0{\cdot}00361\, t - 0{\cdot}0714 \sqrt{36{\cdot}4 - t}$

æthylén: $\delta = 0{\cdot}1929 - 0{\cdot}00188\, t - 0{\cdot}0346 \sqrt{9{\cdot}2 - t}$

széndioxyd: $\delta = 0{\cdot}5668 - 0{\cdot}00426\, t - 0{\cdot}084 \sqrt{31{\cdot}0 - t}$

feltéve, hogy 36·4°, 9·2° és 31·0° a három gáz kritikus hőmérséklete.

Cailletet és Mathias azután megvizsgálták ugyanazon testek sűrűségeit *folyékony alakban is.* Az itt használt készülék is egy vastag csővel összeforrasztott üvegreservoirból állott, mely más részről két parallel szárból álló *O* alakú üvegcsővel is összeköttetésben volt egy horizontális cső által; a két parallel cső mmbeosztással volt ellátva s bizonyos mennyiségű higanyt tartalmazott. A két parallel csőben, nyomás és hűtés kombinácziója folytán a készülékben levő gázból bizonyos mennyiséget folyósítottak. Megmérték a két szárban a folyadék s a higany magasságkülönbségét (h és h'); ha a folyadék sűrűsége x, a higanyé δ s a telített gőzé a kisérlet $t°$-ánál d, akkor az edény egyik szárában m magasságban van folyadék, μ magasságban telített gőz a higany felett; a másik szárban a higany niveauja felett van m_1 magasságú folyadék s μ_1 magasságú telített gőzoszlop; a két szár magassága egyenlő. Tehát a közlekedő edények elve szerint, minthogy a higanyoszlopok niveaukülönbsége h', lesz:

$$mx + \mu d = m_1 x + \mu_1 d + h'\delta;$$

de:

$$m - m_1 = h; \quad \mu + m = \mu_1 + m_1 + h',$$

tehát:

$$(m - m_1)x = h'\delta + (\mu_1 - \mu) d$$

és:

$$hx = h'\delta + (h - h') d,$$

a honnan x kiszámítható.

A sűrűségek itt is parabolák mentén változnak; az empirikus egyenletek:

nitrogénoxydul: $x = 0{\cdot}342 + 0{\cdot}00166\, t + 0{\cdot}0922 \sqrt{36{\cdot}4 - t}$

széndioxyd: $x = 0{\cdot}350 + 0{\cdot}0035\, t + 0{\cdot}101 \sqrt{31{\cdot}0 - t}$

A módszer használhatóságát eldöntendő, az eredményeket összehasonlítják SARRAU elméleti számításaiból nyert eredményeivel; így a sűrűség:

	—30°	—20°	—10°	0°	+10°	+20°	+30°
kisérlet szerint	1·032	0·999	0·960	0·912	0·842	0·751	0·530
SARRAU «	76	1·019	950	878	785	676	461
emp. form.«	33	0·997	961	911	847	754	556

A megegyezés ugyan, a kisérleti nehézségeket tekintve, elég jó, de az eltérés a kisérleti és elméleti eredmények közt a hőmérséklettel együtt nő.

A kisérleti eredmények graphikus ábrázolása feltünteti azon körülményt, melyet később AMAGAT és MATHIAS behatóbban megvizsgáltak, hogy u. i. a folyékony és a telitett gőz sűrűség-görbéi egy pontban egyesülni látszanak, a vertikális húrok felezéspontjai pedig egy egyenesen vannak, mely igen kevéssé hajlik az abscissa tengelyhez. (V. ö. VIII. k. 323. lap.)

A folyósitott gázoknál tehát a telitett gőz sűrűsége nagy mértékben változik a hőmérséklettel, a mi analogia a folyósitott gázok kiterjedésének a hőmérséklettel való gyors növekedésével (46. lap).

A folyékony és szilárd testeknél különben a hőmérséklet s különösen a nyomás változásának a sűrűségre igen kicsiny a befolyása.

Ezen befolyás nagyobb mértékben csak a halmazállapotváltozásnál jelentkezik, mikor is a gőzölgésnél erős csökkenés, az olvadásnál pedig csökkenés, vagy növekedés áll be.

A víznél sűrűségmaximum mutatkozik, melytől kezdve mindkét irányban kiterjed; más folyadékoknál ez a sűrűségmaximum nem mutatkozik. A sűrűségmaximum hőmérsékletére nézve igen eltérőek a meghatározások. MUNKE szerint ez 3·934°-nál van, HÄLLSTRÖM szerint 4·108°-nál; a többi meghatározások e két érték közt változnak. A mint a sűrűségre befolyással van a nyomás, úgy a sűrűségmaximum hőmérsékletét is megváltoztatja. VAN DER WAALS kiszámította KOPP és GRASSI kisérleti eredményei alapján a sűrűségmaximum hőmérsékletét különböző nyomásoknál; nagyobb nyomásnál csökkent a hőmérséklet.* Így:

$p=0$	1·0	1·75	2·85	4·06	5·5	6·9	8·6	10·5 atm.
$t=4·18°$	4·08°	4·0°	3·9°	3·8°	3·7°	3·6°	3·5°	3·4° C.

Befolyása van a sűrűségmaximum hőmérsékletére a víz tisztaságának is. Sóoldatnak sűrűségmaximuma alacsonyabb hőmérsékletnél van, mint a tiszta vízé; épigy víz és alkohol, víz és kéndioxyd keverékénél. Rűdorff a sóoldatoknál, Despretz pedig az utóbbi esetben megállapitották, hogy a sűrűségmaximum hőmérsékletének csökkenése arányos a feloldott só, illetőleg a hozzákevert alkohol, vagy kéndioxyd mennyiségével.

A keverékek, oldatok és ötvények viszonyai még földeritetlenek; a részek sűrűségének s az egész sűrűség összefüggésének kérdése még nincsen megoldva.

Két methodusról fogunk szólni, melyekkel a nehezen folyósitható gázok sűrűségeit meghatározhatjuk.

Wroblewski a folyékony oxygén sűrűségét határozta meg ugyanazon apparatussal, melylyel az oxygént, nitrogént, széndioxydot folyósitotta.** A sűrűség közepes értékéül —136° C. hőmérsékletnél a folyósitás nyomása alatt a számitás 0·899-t adott.

Olszewski a normális forráspontnál fellépő sűrűséget határozta meg.*** Apparátusának a folyósitásra vonatkozó részeit már ismertettük (8. ábra, VIII. k. 311. lap). A sűrűség meghatározására *a* mmbeosztással volt ellátva s pontosan kalibrálva; a mint a folyadék *h* csap óvatos felnyitása által minden nyomástól megszabadult, s a folyósitott gáz konzerválása végett az *a*-ba tett üvegcsőnek s az *a* nak falai közt levő folyadék elpárolgott, megmérte a belső csőben maradt folyadékoszlop magasságát, egyszersmind *h*-t összekötötte az *r* aspirátorral. Az ideáramló gáz *u*-ban fölemeli az edényben levő vizet; *w* csap kinyitásával annyi vizet

* Beibl. I, pag. 511; 1877.

** Wied. Ann. XX, pag. 860; 1883.

*** Wied. Ann. XXXI, pag. 58; 1887.

bocsájtunk ki az edényből, hogy a niveauemelkedést ellensúlyozzuk. Mikor *a*-ból minden folyadék elpárolgott, az *u* csőben s az *r* edényben helyreállítjuk a niveauk egyensúlyát, *h*-t bezárjuk s a barometerállást és az aspiratorban levő víz hőmérsékletét meghatározzuk. Ezzel az összes adatok megvannak: a felhasznált folyadék mennyisége, melyet a magasságleolvasás és *a* kalibrálása ad meg, továbbá a keletkezett gáz mennyisége, mely egyenlő az aspirátorból kifolyatott víz mennyiségével; ezt a térfogatot 0° hőmérsékletre és 760 mm nyomásra redukáljuk.

A kisérletek középeredményei:

methan: $p = 735{\cdot}5$—$737{\cdot}7$ mm közt;
$d = 0{\cdot}415$ (—164° C. hőmérsékleten)
oxygén: $p = 736{\cdot}0$—$747{\cdot}0$ mm közt;
$d = 1{\cdot}124$ (—181·4° C. hőmérsékleten)
nitrogén: $p = 739{\cdot}7$—$748{\cdot}0$ mm közt;
$d = 0{\cdot}885$ (—194·4° C. hőmérsékleten).

Wroblewski és Olszewski meghatározásaiból látszik, hogy az oxygén sűrűsége alacsonyabb hőmérsékleten nagyobb volt.

21. §. *A testek fajmelege.*

A légnemű testeknél a nyomás befolyása itt sem hanyagolható el; itt is különbséget teszünk *az állandó nyomás* és *az állandó térfogat* mellett föllépő fajhők között; jeleik: c_p és c_v.

A kisérleti meghatározásoknál c_p közvetetlenül nyerhető; az ide vonatkozó eljárások alapgondolata rendesen azon elv szokott lenni, melyet Delaroche és Bérard alkalmaztak először.[1] Ismert mennyiségű és hőmérsékletű gáztömeget állandó nyomás mellett kigyózó csőben egy vízkalorimeteren vezettek át s megfigyelték a kiömlő gáznak s a kalorimeternek hőmérsékletét. Ezen elvet felhasználták nagy tökéletesitéssel Regnault[2] és később Wiedemann[3];

[1] Ann. ch. LXXXV; 1813.
[2] Mém. de l'inst. XXVI, pag. 58; 1862.
[3] Pogg. Ann. CLVII, pag. 1; 1876.

a tökéletesitések legfontosabbja arra irányult, hogy a gáz igen nagy felülettel érintkezzék s így melegét lehetőleg kiadja, mialatt a kalorimeteren áthalad.

Ugyanezen módszeren alapulnak a gőzök fajmelegére vonatkozó kisérleti meghatározások is, csak bizonyos változtatások szükségesek, melyek a kisérlet speczialis nehézségéből erednek. Ha u. i. a gőz a hűtőedényben lecsapódik, a kalorimeter nemcsak azon meleget mutatja meg, melyet a gőz a lecsapódás hőmérsékletéig kiad, hanem még azt is, melyet a gőz folyósodása alatt kiad s a melyet a folyadék kiad, midőn a lecsapódás hőmérsékletéről a kalorimeter hőmérsékletére hül le. Ezen nehézséget teljesen csak WIEDEMANN háritotta el, midőn a hűtőedény erős kiszivattyúzásával elérte, hogy a gőz a kalorimeterben lecsapódás nélkül átment.[1]

A c_v direkt meghatározása csak az újabb időkben sikerült JOLY-nak a gőzkalorimeterrel (VIII. k. 402. lap); az elterjedtebb mód abban áll, hogy a $\frac{c_p}{c_v} = k$ viszonyt határozzuk meg kisérletileg s ebből számitás útján c_v-t. A k meghatározására szolgáló módszerek alapelvei: a hang sebessége (KUNDT), az adiabatikus kiterjedés (CLÉMENT és DÉSORMES) ismeretesek.

A folyékony és szilárd testek fajmelegét a kalorimetrikus eljárásokkal szokták meghatározni: vagy a keverési eljárással, vagy az újabb jégolvasztási módszerrel; a kihülés eljárása pontosság tekintetében a másik kettő mögött marad.

Lássuk most a kisérleti eredményeket:

A fajmelegnek a hőmérséklettel való összefüggésére nézve a kisérletek mind a három halmazállapotra azt mondják, hogy a fajmeleg a hőmérséklettel növekszik. *A szilárd testeknél* ezt már a régi kutatások megállapitották.[2] BEHM szerint ez az összefüggés a fémeknél az igen alacsony hőmérsékleteken is fennáll.[3] A megvizsgált fémeknél $+100°$-tól $-186°$-ig haladva, a fajhő nagy mértékben csökkent; pl. a fajhő:

[1] Wied. Ann. II, pag. 195; 1877.
[2] DULONG-PETIT, Schweigger Journ. XXV, pag. 319; 1819.
[3] Wied. Ann. LXVI, pag. 237; 1898.

Cu-nál	+100° C.-on	0·094,	—186° C. on	0·0716
Ni		0·109,		0·0743
Fe		0·113,		0·0721.

A fajhő változását a hőmérséklettel graphikusan ábrázolva, úgy látszik, hogy az abszolut zérusfokon a fajhő is zérus lenne, a mely gyanitást még majd kisérletileg is meg kell vizsgálni. *Folyadékoknál* az első kisérletek ellentmondó eredményeket adtak, míg REGNAULT a kérdést a mondott értelemben eldöntötte.[1] *A légnemű testeknél* c_p-re WIEDEMANN kutatásai döntötték el végleg a kérdést;[2] c_v-re nézve pedig WINKELMANN[3] és WÜLLNER[4] kisérleteit említjük.

Az általános tendenczia tehát, hogy a hőmérséklet növekedésével a fajhő is növekszik; a mint azonban a test valami állapotváltozáshoz közeledik, változás áll be a fajhő viselkedésében is.

A légnemű testekre nézve WIEDEMANN, WINKELMANN és WÜLLNER kisérleteiből azt a következtetést vonhatjuk, hogy a fajmeleg változása általában a kritikus pontjuktól távol levő testeknél kisebb, mint azoknál, melyek a kritikus ponthoz közelebb vannak. Így pl. WIEDEMANN a levegőnél, hydrogénnél és szénoxydnál 0—200° közben a fajhőben semmi változást sem észlelt; a többi megvizsgált test fajhőjének %-os növekedése ezen intervallumban:

ammoniak	12·38%	$\vartheta = 130°$	körül
széndioxyd	22·28%	$\vartheta = 31°$	«
nitrogénoxydul	23·15%	$\vartheta = 32°$	«
æthylén	49·08%	$\vartheta = 10°$	«

Ugyanilyen a változás c_v-re 0—100° közben WIEDEMANN és WINKELMANN szerint.

Igen fontos e tekintetben DE HEEN kisérlete,[5] mely a *folyadékok* fajhőjét vizsgálta meg a kihűlés módszere szerint a kritikus hő-

[1] Mém. de l'inst. XXVI; 1862.
[2] Wied. Ann. II, pag. 195; 1877.
[3] Pogg. Ann. CLIX, pag. 177; 1873.
[4] Wied. Ann. IV, pag. 321; 1878.
[5] Beibl. XII, pag. 650; 1888.

mérsékletig. Az eredmény az, hogy a fajhő a kritikus hőmérséklethez való közeledéskor hirtelen csökkent. Közlött számadatai következők:

æther	$t = 180°$ C. 185	$c = 1·041$ 0·547	$\vartheta = 190—200°$ C.
amylen	$t = 170°$ C. 175	$c = 1·500$ 0·773	$\vartheta = 201°$ C.
æthylbromid	$t = 215°$ C. 220	$c = 0·852$ 0·223	$\vartheta = 226°$ C.

Ugyanilyen viselkedést mutat a *telített gőz fajmelege*: a hőmérséklettel együtt növekszik, ezen növekedés azonban mindig kisebb lesz magasabb hőmérsékleteknél, a kritikus pont közelében pedig a fajhő a hőmérséklet emelkedésekor csökken.[1]

A szilárd testeknél először Pionchon kisérletei mutattak a fajhő növekedésének megváltozására.[2] A vas fajhője igen gyorsan nőtt a hőmérséklettel együtt, de 700° körül csökkenés állt be; nikkelnél 300—400° körül, kobaltnál 900° körül jelentkezik a csökkenés. Regnault és Weber kisérletei pedig arra mutatnak, hogy a fajhő szorosan összefügg a test strukturájával; az olvadt kén és kristályos kén fajheve különböző;[3] a szén fajheve más, ha gyémánt, más, ha graphit állapotban fordul elő.[4]

A fajhőnek a hőmérséklettel való együttes növekedésénél tehát, úgy látszik, mindegyik halmazállapotban egy maximális érték lép föl s a halmazállapotváltozáshoz közeledve, már csökken a fajhő a hőmérséklet növekedésével.

A fajhőnek és a nyomásnak összefüggését a *légnemű testek*nél (széndioxyd), Amagat vizsgálta meg,[5] a ki Joly kisérleti adatai alapján[6] végezte számításait. Midőn a hőmérséklet és a nyomás

---

1 Mathias, Journ. phys. (2) IX, pag. 449; 1890.
2 C. R. CII, pag. 1122; 1886.
3 Regnault, Pogg. Ann. LI; 1840.
4 Weber, Pogg. Ann. CLIV; 1875.
5 C. R. CXXI, pag. 863; 1895.
6 Journ. phys. (2), X. pag. 421; 1891.

együtt növekedett, mindkét fajhőnél csökkenés mutatkozott, k előbb nőtt, azután csökkent; állandó hőmérsékleteknél a nyomás emelkedésével növekedett a fajhő, így k is nőtt. JOLY szerint a sűrűség növekedésekor a levegő és széndioxyd fajheve nő; a hydrogéné csökken, a mi, a nyomásváltozásra vonatkoztatva a dolgot, a széndioxydra ugyanazt mondja. A hydrogén ellenkezően viselkedik.

Megemlítünk itt két kivételt a *folyékony testek* esetében. A higany fajmelege u. i. a hőmérséklet emelkedésekor csökken, a mint azt először WINKELMANN állapította meg;[1] a víz fajmelegének görbéje pedig maximumokat és minimumokat tüntet föl; erre nézve a döntő kisérletet csak az újabb időkben tette meg VELTEN.[2]

Az ötvények fajmelege az alkotórészekéből a:

$$c(p_1+p_2+\cdots)=c_1p_1+c_2p_2+\cdots$$

formula alapján kiszámitható, a hol c a fajmeleg, p az alkotórész súlya.[3] *Keverékek*nél már nem mindig alkalmazható az eljárás, *oldatok* esetében pedig egyáltalában nem ismerünk ily általános összefüggést.

*A fajmelegnek és a kritikus állandók*nak összefüggésére NADEJDINE állitott fel szabályt, mely a megvizsgált esetekben a kisérleti eredményekkel jól megegyezett.[4] Két folyadéknál correspondeáló állapotokat tételezve fel, a fajmelegek (k és k') úgy aránylanak, mint az elgőzitési melegek (r és r') és a kritikus nyomások (p_k és p'_k) recziprok értékeinek szorzatai:

$$k:k'=rp'_k:r'p_k.$$

Kisérleti és elméleti eredményei:

---

[1] Pogg. Ann. CLIX; 1876.
[2] Wied. Ann. XXI, pag. 45; 1884.
[3] REGNAULT, Pogg. Ann. LIII; 1841.
[4] Beibl. XI, pag. 109; 1885.

	fajhő 0°-nál számítás	kisérlet szerint
æthyæther	0·497	0·529
széndisulfid	0·230	0·235
chloroform	0·2379	0·2324
szénchlorid	0·202	0·198
benzin	0·429	0·436
aceton	0·488	0·506.

A felirt összefüggésből: $k = k' \frac{rp'_k}{r'p_k}$, tehát a fajhő a kritikus hőmérsékleten, a hol $r = 0$, maga is zérus, a mi úgy az elméleti megfontolásokkal, mint az említett kisérleti eredményekkel megegyezik.

22. §. *A kapillaritás jelensége.*

A kapilláris jelenségek a XVII. században kezdték a physikusokat foglalkoztatni s a kutatások mindjárt az első időkben lényeges eredményekkel jártak. Borelli (1670) megállapította, hogy a folyadék emelkedésének magassága fordítva arányos a cső átmérőjével; a vízen úszó testek közt jelentkező vonzásokat a felületi feszültséggel magyarázta. Fontos lépést képeznek itt Young vizsgálatai, ki megállapítja, hogy a kapilláris jelenségek a felületi feszültségre vezethetők vissza; tárgyalásainak kiinduló pontja azon elv, hogy minden folyadék felülete bizonyos feszültségi állapotban van, a mely feszültség tendencziája, hogy a felület felszínét a minimumra redukálja; ezen feszültségből s a folyadékra ható többi erőkből megállapítja a felület alakját s a niveaukülönbséget.

A tüneménykör elméletét azután nagyban fejlesztették Laplace, Poisson és Gauss. Meg volt tehát állapítva a felületi feszültség fontos szerepe; az elméleti kutatások erre nézve a következő képletet adták: ha a felületi feszültség f, a folyadék sűrűsége s, telített gőzének sűrűsége σ, a nehézségi gyorsulás g, a^2 pedig egy pozitiv állandó, akkor:

$$f = \frac{a^2}{2} (s - \sigma) g.$$

A kisérleti kutatások legfontosabb feladata a felületi feszültség meghatározása volt. A legelső meghatározások alapelve a kapilláris emelkedés megfigyelése volt; később egy másik eljárás merült föl, mely szerint egy horizontális lapon, melyet az illető folyadék nem nedvesít meg, nagy csöppet alakitunk a folyadékból; ezen csöpp alakjából elméleti számítások adják meg a felületi feszültséget.

Az újabb kutatások közül azt ismertetjük meg, melyet br. Eötvös Loránd használt kapillaritási kutatásainál.[1] Lényege ennek abban áll, hogy a folyadék felszínére két fényforrásból fénysugarakat bocsájtunk, melyek a felszinen reflektálódva, egy kathetometer horizontális távcsőjéből megfigyelhető méteres beosztásra esnek. A fénysugarak s a felület hajlását, továbbá a reflektált sugarak távolságát megmérve, kiszámitható a^2 (kapilláris állandó) értéke s ennek alapján f is. A módszer megbizhatóságát más kisérletezők eredményeivel tett összehasonlításai mutatták.

A felületi feszültségnek s a hőmérsékletnek egymással való összefüggéséről már a régebbi kisérletek azt mutatták, hogy a kapilláris magasság csökkent a hőmérséklet emelkedésével.[2] Az újabb kisérletek ezen csökkenést közvetlenül a^2-ről mutatták ki és direkt kisérletekkel az is kitűnt, hogy a^2 a kritikus hőmérsékletnél zérus lesz.[3] Hogy a felületi feszültség a kritikus hőmérsékleten, melyen tehát elfogadott értelmezésünk szerint a folyadéknak s telitett gőzének sűrűsége egyenlő lesz, zérus, az a felületi feszültségnek adott definicziójából következik.

A kapilláris állandóra s ezzel együtt a felületi feszültségre a *nyomásnak* is van befolyása és pedig a nyomás növekedése csökkenti ezen két mennyiséget. Ezt az összefüggést újabban Kundt vizsgálta meg;[4] megállapitotta a kapilláris állandó csökkenését, midőn a folyadék fölé valami gázt szivattyúzott s ezzel a folyadékra ható nyomást növelte. A csökkenés a gáznemtől függött; a megvizs-

[1] Műegyetemi Lapok; 1875. — Wied. Ann. XXVII, pag. 448; 1886.
[2] Frankenheim és Sondauss; Brunnes; 1846.
[3] Eötvös, Math. és Term. tud. Ért. III, pag. 60; 1884.
[4] Berl. Monatsber. 1880; pag. 811.

gált esetekben a levegőnél nagyobb volt, mint a hydrogénnél; továbbá magasabb nyomásoknál egyenlő nyomás növekedésre nagyobb, mint alacsonyabb nyomásoknál.

A felületi feszültségről elméleti megfontolásokon alapuló törvényt ad Eötvös, melynek helyességét kisérleti úton igazolta.* A tétel végső fogalmazásban azt mondja, hogy a molekuláris felületi energia változása arányos az abszolut hőmérséklettel. A felületi feszültségre a belőle következő összefüggés így fejezhető ki: ha f és f_1 két folyadék felületi feszültsége, p és p_1 telitett gőzeinek nyomása, T és T_1 abszolut hőmérséklete, akkor:

$$\frac{f^3}{f_1^3} = \frac{p^2 T}{p_1^2 T_1}.$$

A kisérleti adatok szerint a felületi energia növekedésének hőmérsékleti koefficziense 0·227 állandó szám, kivéve a vizet, alkoholt és zsirsavat; ezeknél a koefficziens a hőmérséklettel együtt növekszik, úgy, hogy a kritikus hőmérséklet közelében eléri a theoretikus értéket. Megjegyezzük, hogy T és T_1 megfelelő hőmérsékletek.

23. §. *Hővezetés és hősugárzás.*

A hővezetés kisérleti meghatározására szolgáló módszerek alapelve következő: a test egyik részével állandó meleget közlünk s megfigyeljük a többi részén a hőmérséklet változását; elméleti megfontolások szerint, ha valamely testben egymástól p távolságra két parallel síkmetszést teszek, a metszet felszíne f, a két sík hőmérsékletei ϑ és ϑ', a megfigyelés ideje t, akkor a test keresztmetszetén ezen idő alatt áthaladt melegmennyiség:

$$Q = kf\frac{\vartheta - \vartheta'}{p}t;$$

a k faktor neve: *hővezetési együttható.* Megkülönböztetésül azon esettől, midőn két test érintkező felületén történő hőátmenetelről

* Math. és Termt. Ért. IV; 1885. — Wied. Ann. XXVII, pag. 448; 1886.

van szó, *k*-t belső hővezetési együtthatónak nevezték el; az utóbbi proczessus a külső hővezetés. Mi a belső hővezetésre leszünk tekintettel.

A hővezetési együttható a különböző halmazállapotokban általában nő a hőmérséklettel együtt. *A légnemű testek*nél a kutatások egyértelműen azt mutatták, hogy a sűrűségnek a hővezetőképességre nincs befolyása s a látszólagos befolyások a hőáramlástól származnak.[1] *A folyadékok* hővezetésére csak az újabb időkből van pontos kisérletünk. H. F. Weber számos folyadéknál azt találta, hogy a hővezetési együttható arányos az egyenlő térfogatra vonatkoztatott fajhővel, tehát az egyenlő tömegre vonatkoztatott fajhővel is, melyet mi egyszerűen fajhőnek neveztünk; u. i. ha a fajhőt megszorozzuk a sűrűséggel, megkapjuk az egyenlő térfogatra vonatkoztatott fajhőt. *A szilárd testeknél* különösen a fémek estek behatóbb vizsgálat alá; itt az tűnt ki, hogy vannak testek, melyeknél a hővezetési együttható a hőmérséklettel együtt nő (vörösréz, sárgaréz, aluminium, újezüst), melyeknél csökken (cadmium, vas, ón, ólom, antimon, bismuth), míg a magnesiumnál állandó marad.[2] A többi szilárd testeknél nem vizsgálták még meg behatóbban a hőmérséklettel való összefüggést; az egy-két idevonatkozó adatból, úgy látszik, hogy legalább egyeseknél növekszik a hővezetési együttható a hőmérséklettel.

A halmazállapotváltozásra csak Barus kisérlete terjeszkedett ki,[3] a ki a thymolnál hirtelen növekedést észlelt a hővezetésben, midőn az a folyékony állapotból a szilárdba megy át; a növekvés körülbelül 13% volt. Valószínűleg ilyen változás történhetik, midőn a légnemű test folyékony állapotba megy át, mivel a légnemű testek rosszabb hővezetők, mint a folyadékok; erre nézve azonban direkt kisérleti eredményeink nincsenek.

Hősugárzás áll be, ha egy test alacsonyabb hőmérsékletű környezetben van, mikor is hőmérséklete folyton alább száll, míg a

[1] Graetz, Winkelmann, Schleiermacher, Wied. Ann. XIV; 1881. XIX; 1883. XXIX; 1886. XXXIV; 1888.

[2] Lorenz, Wied. Ann. XIII, pag. 422; 1881.

[3] Winkelmann, Physik II. 2, pag. 309.

környezetével nem lesz egyenlő. A kisérleti eljárások a hőmérséklet változásának megfigyelésén alapulnak. Itt különösen a testek hőátbocsájtóképessége s a sugárzás intensitása érdekel bennünket.

*A légnemű testek*nél különösen Tyndall tett sok kisérletet;[1] főeredményei: gázoknál igen kis sűrűség esetében az abszorpczió arányos a sűrűséggel, a sűrűség növekedésével ezen arányosság eltűnik; minél nagyobb a hőforrás hőmérséklete, annál nagyobb az átbocsájtó képesség. Hoorweg kisérletei szerint a gőzök abszorpczióképessége nő a hőmérséklettel együtt.[2]

*A folyékony és szilárd testek*nél az átbocsájtó képesség nő, ha az illető test hőmérséklete nő s akkor is, ha a hőforrás hőmérséklete nő.

A mi a sugárzás intensitásának a hőmerséklettől való összefüggését illeti, ide igtatjuk chronologikus sorrendben a három tapasztalati képletet. Dulong és Petit szerint: $Q = ma^t$, Q a melegmennyiség, melyet a testfelület egysége mp-ként $t°$ hőmérsékleten kibocsájt, $a = 1{\cdot}0077$ minden testnél, m a testre jellemző állandó.[3] Stefan szerint: $Q = mT$,[4] T az abszolut hőmérséklet,[4] Weber szerint $Q = mTe^{aT}$, $a = 0{\cdot}0043$ minden testre.[5]

A kisérleti kutatások általában azt mutatják, hogy Stefan formulája felel meg legjobban a tapasztalatnak; ezen összefüggést Boltzmann[6] elméleti úton is megokolta.

24. §. *A testek elektromos tulajdonságai.*

E paragrafusban a dielektromos állandók, az elektromos vezetőképesség s a hőelektromos hatások fognak szóba kerülni.

A dielektromos állandók kifejezik a szigetelő réteg befolyását az elektromos sűritők kapaczitására; kisérleti meghatározásuk

---

[1] Phil. Trans. 1864. — Phil. Mag. 1862; 1863; 1882.
[2] Pogg. Ann. CLV, pag. 385; 1874.
[3] Ann. ch. ph. VII, pag. 225; 1818.
[4] Wien. Ber. LXXIX. (2), pag. 391; 1879.
[5] Berl. Akad. 1888; pag. 565.
[6] Wied. Ann. XXII, pag. 291; 1894.

alapja, hogy megmérjük a potencziált a sűrítő belső (V) és külső falán (V') s akkor ezen állandó $D = \frac{V - V'}{V'}$. Ezen állandókat a *gázoknál* először Boltzmann határozta meg (1873); az ő kisérleteiből tünt ki először, hogy a dielektromos állandók különböznek az egyes gáznemek szerint és hogy ugyanazon gáznál a nyomással együtt nőnek; tehát tulajdonképen nem állandók. *A folyadékoknál* a régibb kisérletek szerint D növekszik a hőmérséklettel,[1] újabban azonban Negreano azt mutatta ki,[2] hogy csökken. *A szilárd testek* közül a kristályokat vették behatóbb kutatás alá s azt találták, hogy D a különböző irányokban más.[3]

Az elektromos ellenállás, mint kimutatták, egyenesen arányos a vezető hosszúságával és fordítva arányos a keresztmetszetével; az arányossági tényező a fajlagos ellenállás, melynek reciprok értékét nevezik fajlagos *vezetőképesség*nek. Az ellenállás s ebből a vezetőképesség is, az ismeretes Wheatstone híddal mérhető meg.

A vezetőképesség *a légnemű és folyékony testek*nél a hőmérséklettel együtt növekszik. A légnemű testekre ezt először Blondlot állapitotta meg[4] s ezzel együtt azt is, hogy a vezetőképesség a ritkítás növekedésével is nőtt; az eredményeket újabban Blondlot kutatásai is megerősitették.[5] Az ellenállás tehát csökken, ha a hőmérséklet s a ritkítás nagyobbodnak. Az ellenállás csökkenése s igy a vezetőképesség növekedése a ritkításnál csak egy bizonyos határig tart; ha a ritkítás igen nagy, már igen nagynak kell lennie az elektromos feszültségnek, hogy vezetés legyen; ekkor állnak be a kathód jelenségek. Hogy a légüres térben létesülhetnek-e elektromos jelenségek, még biztosan nem tudjuk; úgy látszik azonban, hogy a teljes vakuum is vezeti az elektromosságot.[6] *A folyékony testekre* nézve Kohlrausch állapitotta meg,[7] hogy magasabb hőmérsék-

---

[1] Palaz; 1859. Cassie; 1859.
[2] Beibl. XVI, pag. 369; 1892.
[3] Root; 1876.
[4] Ann. ch. ph.; 1853.
[5] C. R. XCII; 1881.
[6] Winkelmann, Physik III. 1, pag. 330.
[7] Wied. Ann. VI; 1879.

leteknél nagyobb a vezetőképességük, de ez a növekedés a hőmérséklettel annál lasabban történik, minél jobb vezető a test, úgy hogy magas hőmérsékleteknél a különbségek az egyes testek között eltűnnek. *A szilárd testeknél* a tiszta fémekre ARNDTSEN (1858) állapította meg először, hogy a vezetőképesség a hőmérséklet növekedésével csökken. Ez az összefüggés igen magas hőmérsékleteknél is érvényes.

Újabb időkben nagyfontosságú eredményeket adtak az igen alacsony hőmérsékleteknél végzett kisérletek. CAILLETET és BOUTY * —123° C.-ig megvizsgálták több tiszta fém elektromos ellenállásának változását s azt találták, hogy ez a hőmérséklet csökkenésekor erősen kisebbedik. Még alacsonyabb hőmérsékletekre terjeszkedett ki WROBLEWSKI ; ** a vörösréz ellenállását vizsgálta meg +100° C. és —201° C. (kb. a nitrogén fagyáspontja) között ; a 7. ábrán bemutatott (VIII. k. 308. l.) készüléket használta. A folyósítási edénybe (*r*) teljesen isolálva két vörösrézdrótot dugott úgy, hogy ezek folyékony nitrogénbe merültek s először megvizsgálta a folyékony nitrogén vezetőképességét ; a testet teljes isolátornak találta. Most a megvizsgálandó rézdrótot igen vékony üvegcsövecskére csavarta s két végével az emlitett drótok végeihez forrasztotta. Kisérleteiből egyes számadatokat a következő táblázat ad :

I.		II.	
$t = +100°$ C., ellenállás =	5·174	$t = +25°$ C., ellenállás =	19·262
0	3·164	0	17·489
—103	2 073	—103	9·769
—146	1·360	—146	6·738
—193	0·580	—193	2·754
—200	0·414	—201	1·655

Az ellenállás tehát gyorsabban csökken, mint a hőmérséklet és igen mély hőmérsékleteknél 0 felé közeledik.

Ezen eredményt megerősítették és több irányban kiterjesztették

* C. R. C, pag. 1888 ; 1885.

** Wied. Ann. XXVI, pag. 27 ; 1885.

Dewar, Liveing és Fleming kisérletei, melyekkel az ellenállások változását +100°-tól —197°-ig vizsgálták; a megvizsgált testek drótalakban folyékony oxygén fürdőbe merültek, a mely test, hasonlóan a folyékony nitrogénhez, igen jó isolátor. A főbb eredmények itt következnek.

Tiszta fémeknél az ellenállás igen alacsony hőmérsékletnél igen kicsiny; pl. a tiszta vas ellenállása —197° C.-nál $\frac{1}{23}$-a a +100°-nál jelentkező ellenállásnak, réznél $\frac{1}{11}$-e. Ha a viszonyokat geometriailag tüntetjük föl, abscissáknak az abszolut hőmérsékleteket ordinátáknak a fajlagos ellenállásokat választva, az ellenállás görbéjének meghosszabbitása az abszolut nullaponton megy keresztül, tehát itt az ellenállás 0 és *a tiszta fémek tökéletes elektromos vezetőkké válnak.*[1] A görbék alakjaiban három typus különböztethető meg: az abscissa tengelyhez konkav (*Fe, Ni, Sn, Cu*), az abscissa tengelyhez konvex alakúak (*Au, Pt, Pd, Ag*); az aluminium megfelelő vonala egyenes.[2]

Az ötvényeknél az ellenállás görbéje közelitőleg egyenes, ha az alkotó részek igen különbözők (*Pt—Ag*, platinoid, újezüst); ha az alkotó részeknek chemiai szerkezete hasonló, a görbék meredekebbek; azonban a meghosszabbitásban sohasem haladnak az abszolut zérusponton keresztül.[3]

Szénnek és minden isolátornak elektromos ellenállása növekedik a hőmérséklet csökkenésével.[4]

Ezen kutatásokból még azon érdekes eredmény is adódott, hogy a folyékony oxygén és nitrogén, továbbá, mint Dewar még kimutatta, a folyékony levegő is, teljes isolátor.

A fémek elektromos vezetőképességét összehasonlitották a hővezetőképességgel; Wiedemann és Franz [5] azt találták, hogy a két vezetőképesség aránya állandó. Az újabb kutatások ezen ered-

---

[1] Dewar-Fleming, Beibl. XVI, pag. 214; 1893. — Dewar-Liveing, Beibl XX, pag. 208, 994; 1896.

[2] Beibl. XVI, pag. 214; 1893.

[3] Beibl. XVI, pag. 214; 1893. — Fleming, Beibl. XX, pag. 886; 1897.

[4] Beibl. XVI, pag. 214; 1893. XX, pag. 886; 1897.

[5] Pogg. Ann. 1853; 1855; 1859.

ményt kétségessé tették; WEBER szerint[1] a két hővezetőképesség aránya arányosan változik a fajhővel; KIRCHHOFF és HANSEMANN[2] ismét állandónak tapasztalták az arányt, csak a vasnál tapasztaltak kivételt. A kérdés tehát még eldöntetlen.

Igen fontosak azon kutatások, melyek a *halmazállapotváltozásra* vonatkoznak. A fagyásnál, illetőleg az olvadásnál igen nagy mértékű a változás, de a változás természete különböző. Így KOHLRAUSCH szerint[3] bróm- és chlórezüst ellenállása a megszilárdulásnál igen gyorsan és erősen növekedik; jódezüsté ellenben változást csak azon hőmérsékletnél mutat, melynél amorph állapotból kristályosba megy át, tehát ismét szerkezeti változást szenved.

A kén is megolvasztva 40-szer jobban vezet, mint előbb,[4] az ólom és ón pedig a szilárd állapotban vezet jobban.[5] A higanynál is ez az eset jelentkezik.[6]

A kritikus hőmérsékletre BARTOLI terjeszkedett ki;[7] a benzolt, æthyloxydul és a methylalkoholt vizsgálta meg s egyértelműen azt találta, hogy a kritikus hőmérsékleten felül rosszabb a vezetőképesség; benzol teljesen elveszti vezetőképességét, æthyloxyd a kritikus hőmérsékletig rosszul vezet, azonfelül épen nem, methylalkohol a kritikus hőmérsékletig jól vezet, azontul nem.

Az eredményeket teljes fontosságukban még nem méltányolhatjuk; itt is szükségesek volnának kisérletek, melyek egy testnél követnék az ellenállás, illetve vezetőképesség változását a különböző fázisokon át. Csak megemlítjük, hogy előzetes kisérletek úgy mutatják, mintha a folyadék és telített gőzének elektromos vezetőképessége analog magatartást mutatna a sűrűség változásával (VIII. k. 323. lap).

---

[1] Berl. Monatsber. 1880; pag. 459.
[2] Wied. Ann. XIII, pag. 417; 1881.
[3] Wied. Ann. XVII, pag. 642; 1882.
[4] FOUSSEREAU, C. R. XCVII; 1883.
[5] RAMY és CLARKSON, Beibl. XI, 1886.
[6] DEWAR, Beibl. XX, pag. 994; 1896.
[7] Beibl. XI, pag. 160; 1886.

A hőelektromos tünemények is jelentékeny változásokat mutatnak a hőmérséklettel. A Peltier-hatás változása a hőmérséklettel általában ugyanaz, mint az ellenállásé; ha a hőmérséklet nő, a Peltier-hatás is nő, igen alacsony hőmérsékleteknél pedig Dewar kutatásai szerint,* a Joule-hatással együtt a zérus felé konvergál.

Péch Aladár.

---

* Chem. News LXXI, pag. 192; 1895.

MEGOLDOTT FELADATOK.

Harmadik megoldás Tőtössy Béla műegyetemi tanár úrtól.

A kúpszeletet oly parameter elosztással borítjuk be, a melynél az A', B', C', D pontoknak rendre a ∞, 0, $+1$, λ parameter értékek felelnek meg. Tudjuk akkor, hogy a λ nem más mint az $(A'B'C'D)$ ketttősviszony számértéke, tehát

$$(A'B'C'D) = \lambda.$$

Ha az X_1, X_2, X_3, X_4 pontoknak parameter-értékei rendre x_1, x_2, x_3, x_4, akkor tudjuk, hogy az $(X_1X_2X_3X_4)$ kettős viszony számértékét az

$$(X_1X_2X_3X_4) = \frac{x_1-x_3}{x_2-x_3} : \frac{x_1-x_4}{x_2-x_4} \tag{1}$$

képlet adja meg. Az A_1, B_1, C_1 pontok parameter-értékeit rendre α, β, γ-val jelölvén, lesz tehát:

$$(A_1B_1C_1D) = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\lambda}{\beta-\lambda}. \tag{2}$$

Az α, β, γ meghatározására gondoljuk meg, hogy A_1, B_1 illetőleg C_1 a D-nek megfelelői azokban az involucziókban, a melyeknek pólusai A, B, illetőleg C kettőspontjai B', C'; C', A'; illetőleg A', B', tehát:

$$(B'C'DA_1) = -1,\ (C'A'DB_1) = -1 \text{ és } (A'B'DC_1) = -1.$$

Ez egyenletek bal oldalaiba az (1) alatti képlet segítségével az A', B', C', A_1, B_1, C_1 és D pontok parameter értékeit bevezetvén három egyenletet kapunk a melyből rendre az

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\lambda-1},\ \beta = 2-\lambda,\ \gamma = -\lambda$$

értékeket nyerjük. Ezeket az értékeket a (2) alatti egyenletbe behelyettesítvén, a kijelölt alapműveletek elvégzése után azt találjuk, hogy

$$(A_1B_1C_1D) = \lambda,$$

és hogy

$$(A'B'C'D) = (A_1B_1C_1D),$$

tehát

$$A'B'C'D \,\overline{\wedge}\, A_1B_1C_1D.$$

*

Negyedik megoldás Kürschák József műegyetemi tanár úrtól.

1. *Ha két háromszög, ABC és $A'B'C'$, valamely K kúpszeletre vonatkozólag egymásnak polárháromszöge, és csúcsaiknak projekczióit K tetszőleges D pontjából K-ra A_1, B_1, ill. A_1'. B_1', C_1'-vel jelöljük, akkor*

$$(A_1B_1C_1D) \,\overline{\wedge}\, (A_1'B_1'C_1'D).$$

Ennek bebizonyításánál jelöljük az egyes pontoknak K-ra vonatkozó polárisait a megfelelő kis betűkkel. Akkor

$$(A_1B_1(D) \,\overline{\wedge}\, (\overline{AB},\ \overline{BD},\ \overline{CD},\ d) \,\overline{\wedge}\, (a\dot{d},\ b\dot{d},\ c\dot{d},\ D)$$

s ha a d-n nyert pontsort $C' = \dot{a}b$ pontból $c = A'B'$ egyenesre vetítjük:

$$(A_1B_1C_1D) \,\overline{\wedge}\, (B'A'\dot{c}dM),$$

hol $M = (C_1'DA'B')$. Végre vetítsük a c-n nyert pontsort D-ből K-ra, akkor

$$(A_1B_1C_1D) \,\overline{\wedge}\, (B_1'A_1'DC_1');$$

s innen valóban

$$(A_1B_1C_1D) \,\overline{\wedge}\, (A_1'B_1'C_1'D).$$

2. Ha ABC a K körülírt háromszög, akkor $A_1 = A_1'$, $B_1 = B_1'$, $C_1 = C_1'$ az ABC oldalainak érintéspontjai, s az imént bebizonyított tétel a megoldandó feladatban kimondott tételbe megy át.

*

Ötödik megoldás Csillag Vilmos műegyetemi tanársegéd úrtól.

Jelöljük a kúpszelet D pontjabeli érintőjét DD-vel és a $(BC,\ CA,\ AB,\ DD)$ teljes négyoldal diagonálháromszögének szögpontjait A'', B'' C''-vel.

Mint a kúpszelet köré írt négyoldal tulajdonságaiból ismeretes, a DA', DB' ill. DC' érintési húrok az A'', B'' ill. C'' diagonálpontokon mennek keresztül. (Brianchon-féle tétel alkalmazása.) Vagyis

$$(D\cdot A',\ B',\ C') \equiv (D\ A'',\ B'',\ C'').$$

Továbbá az (ABC) és $(A''B''C'')$ perspektiv helyzetű háromszögek czentrális kollineácziót határoznak meg, melynek DD a tengelye. A kollineár vonatkozásban pedig a megfelelő elemquadruplumok kettős viszonyai egyenlők lévén, jelesen

$$(D\cdot A'B'C'D) \equiv (D\cdot A''B''C''D) \overline{\wedge} (D\cdot ABCD) \equiv (D\cdot A_1B_1C_1D),$$

vagy rövidebben írva

$$(A'B'C'D) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1D).$$

*

Hatodik megoldás Privorszky Alajos főreáliskolai tanár úrtól Aradon.

Ha a sík pontjai és egyenesei közt oly vonatkozást létesítünk, hogy a háromszög A, B, C szögpontjainak a szemközt fekvő a, b, c oldalak és viszont a $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ oldalaknak a velök szemközt fekvő A, B, C szögpontok felelnek meg, akkor a háromszög oldalainak egyikén sem fekvő D ponthoz bármely a háromszög szögpontjain át nem haladó d egyenes kapcsolása által, mindig egy egyértelmű polárrecziproczitást állapítunk meg. Így a jelen esetben az adott kúpszelet D pontjához, az azon a kúpszelethez vont érintőt is kapcsolhatjuk, feltéve, hogy a kúpszelet körülírt ABC háromszög szögpontjai és oldalai közt az előbb kimondott összefüggés fennáll.

Ha most a háromszög a, b, c oldalainak d érintővel való metszéspontjait A_0, B_0, C_0 betűkkel, D és az A, B, C pontokat összekötő egyeneseket sorban a_1, b_1, c_1 betűkkel jelöljük, a fennálló polárrecziproczitás folytán

$$(a_1b_1c_1d) \overline{\wedge} (A_0B_0C_0D).$$

De hasonlóképen polárrecziproczitást létesítünk úgy is, hogy az A', B', C', D érintési pontok megfelelő egyeneseinek az a, b, c, d érintőket tekintjük. Ekkor az A', B', C' pontok D-vel való összekötő egyeneseit a', b', c'-vel jelölve,

$$(a'b'c'd \overline{\wedge} (A_0B_0C_0D),$$

tehát

$$(a_1b_1c_1d) \overline{\wedge} (a'b'c'd).$$

Mivel pedig

$$(a_1b_1c_1d) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1D)$$

és

$$(a'b'c'd) \overline{\wedge} (A'B'C'D),$$

azért

$$(A_1B_1C_1D) \overline{\wedge} (A'B'C'D).$$

Ezzel a bizonyítás megtörtént.

*

Hetedik megoldás Kürschák József műegyetemi tanár úrtól.

1. *Ha két háromszög – ABC és A'B'C' valamely k kúpszeletre vonatkozólag egymásnak polárháromszöge, D pedig a síknak egy tetszőleges pontja, akkor az ugyanazon D sorozón levő*

$$D(A, B, C, \ldots) \overline{\wedge} D(A'B'C' \ldots)$$

projektiv sugársorok kettős elemei k-ra vonatkozólag konjugált egyenesek.

Ha D valamelyik háromszögnek egyik oldalára esik, akkor közvetetlenül belátható, hogy oly *parabolikus* projektiv sugársorokkal van dolgunk, melyeknek kettős elemeit az illető oldal s k-ra vonatkozólag neki konjugált egyenes képezik. Minden más esetben a tétel analitikailag a következő módon igazolható.

Ha a koordinátarendszert alkalmasan választjuk, k egyenlete pontkoordináták, illetőleg vonalkoordinátákban:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0.$$

Továbbá az

$$A \equiv (a_1, a_2, a_3), \quad B \equiv (b_1, b_2, b_3), \quad C \equiv (c_1, c_2, c_3), \quad D \equiv (d_1, d_2, d_3)$$

pontok koordinátáiból a DA, DB, DC egyenesek egyenletei következőleg fejezhetők ki:

$$U_1 \equiv (bcd)(adx) = 0, \quad U_2 \equiv (cad)(bdx) = 0, \quad U_3 \equiv (abd)(cdx) = 0.$$

Itt az első tényezők a végre vannak az egyenletekhez csatolva, hogy az

$$(i, k, l) \equiv \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3 \\ k_1, & k_2, & k_3 \\ l_1, & l_2, & l_3 \end{vmatrix}$$

alakú determinánsokra vonatkozólag ismeretes relácció értelmében

$$u_1 + U_2 + U_3 \equiv 0$$

legyen.

DA', DB', DC' egyenletei

$$V_1 \equiv \frac{b_x}{b_d} - \frac{c_x}{c_d} = 0, \quad V_2 \equiv \frac{c_x}{c_d} - \frac{a_x}{a_d} = 0, \quad V_3 \equiv \frac{a_x}{a_d} - \frac{b_x}{b_d} = 0,$$

hol

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad a_d \equiv a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3.$$

Itt is

$$V_1 + V_2 + V_3 \equiv 0.$$

Ha most már az

$$U_1 + \lambda U_2 = 0 \quad V_1 + \lambda V_2 = 0$$

sugársorokat úgy vonatkoztatjuk egymásra, hogy a λ ugyanegy értékéhez tartozó sugarak feleljenek meg egymásnak, akkor az első sor DA, DB, DC sugaraihoz DA', DB', DC' lesznek a második sor megfelelő sugarai a két sugársor kettős elemeinek összeszorzott egyenlete

$$U_1 V_2 - U_2 V_1 = 0.$$

Ámde

$$U_1 V_2 - U_2 V_1 = (bcd)(adx)\left(\frac{c_x}{c_d} - \frac{a_x}{a_d}\right) - (cad)(bdx)\left(\frac{b_x}{b_d} - \frac{c_x}{c_d}\right)$$

$$= \{(bcd)(adx) + (cad)(bdx) + (abd)(cdx)\}\frac{c_x}{c_d} -$$

$$- \left\{(bcd)(adx)\frac{a_x}{a_d} + (cad)(bdx)\frac{b_x}{b_d} + (abd)(cdx)\frac{c_x}{c_d}\right\}$$

s ha még tekintetbe veszszük a U-k között fennálló azonosságot, akkor a szóban forgó egyenespár egyenlete ily alakban is irható:

$$(bcd)(adx)\frac{a_x}{a_d} + (cad)(bdx)\frac{b_x}{b_d} + (abd)(cdx)\frac{c_x}{c_d} = 0.$$

Ez az egyenlet azonos tartozik lenni a két egyenes

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \quad w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = 0$$

egyenleteinek szorzatával, tehát egyebek között benne x_1^2, x_2^2, x_3^2 együtthatói ugyanazok tartoznak lenni mint ebben a szorzatban. Az innen eredő három egyenlőség összege:

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = (bcd)(ada)\frac{1}{a_d} + (cad)(bdb)\frac{1}{b_d} + (abd)(cdc)\frac{1}{c_d},$$

vagyis

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0,$$

mint azt a bebizonyítandó tétel követeli.

2. Midőn D a kúpszeletben van, akkor két rajta keresztül menő egyenes csak úgy lehet k-ra vonatkozólag konjugált, ha egyikök a D pontban

vont érintő, melyet DD-vel akarunk jelölni. Ekkor tehát az imént bebizonyított tétel értelmében

$$D(A, B, C, D) \overline{\wedge} D(A', B', C', D).$$

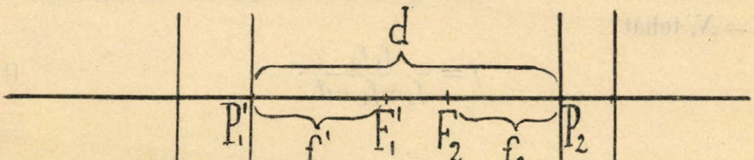
Ha még e két sugársort k-val metszük és arra az esetre szorítkozunk, hogy ABC a k kúpszelet körülírt háromszög, éppen a kitűzött feladatban kimondott tételt nyerjük.

AZ OPTIKAI GYŰJTŐ ÉS SZÓRÓ SZERKEZETEK HELYES MEGKÜLÖMBÖZTETÉSÉRŐL.*

1. Gömbalakú törőfelületekből alkotott közös tengelyű optikai rendszer optikai jellegét a második gyujtó távolság előjeléből szokták megitélni; pozitiv előjelből gyűjtő hatásra, negativ előjelből szóró hatásra következtetnek. Ez a következtetés azonban úgy az igen vastag egyszerű lencsénél, valamint némely lencsékből összeállított összetettebb szerkezetnél, hibás.

Bármely összetett rendszernek második gyujtó távolságát (f') kifejezi az ismert képlet

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{d + f_2 - f'_1},$$



1. ábra.

melyben f'_1 a fényt felfogó első résznek (1) második gyujtó távolsága, f_2 és f'_2 a második rész (2) első illetőleg második gyujtó távolsága és d jelenti a második rész első főpontjának (P_2) távolságát az első rész második főpontjától (P'_1), a mint az 1. ábrában ki van jelölve. Minden távolság pozitiv, ha az illető főponttól számítva a

* Előadatott a Math. Phys. Társulat f. évi márczius 22-iki ülésén.

fény haladási irányába esik, az ellenkező helyzetben negativ. Egyetlen lencsénél d jelenti a lencse vastagságát a tengelyben s itt d mindig pozitiv jelü.

Egyetlen gömbalakú törőfelület, valamint vékony lencse, gyűjtő vagy szóró, a szerint a mint a második gyujtó távolság pozitiv vagy negativ előjelü.

Hogy ne kelljen kétféle gyujtó távolságra ügyelnünk, az ismert összefüggés alapján írhatjuk $f_2 = -\frac{N}{N'} f_2'$, ha N ill. N' alatt értjük a közeg abszolut fénytörési együtthatóját a második rész előtt és utána.

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{d - \frac{N}{N'} f_2' - f_1'} = \frac{f_1' f_2'}{\frac{N}{N'} f_2' + f_1' - d},$$

és ha emlékezetünkbe vesszük, hogy képletünkben csak második gyujtó távolság fordul elő, elhagyhatjuk a vesszőket és írhatjuk

$$f = \frac{f_1 f_2}{\frac{N}{N'} f_2 + f_1 - d}. \qquad \text{I)}$$

Midőn a szerkezet második része levegővel van körülvéve, $N' = N$, tehát

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 + f_1 - d}. \qquad \text{II)}$$

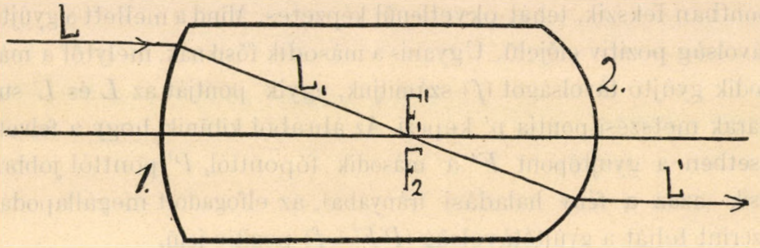
Bikonvex lencse.

2. Foglalkozzunk először a kétszer domború lencsével, melynél mindkét felület a gyűjtő rendszer természetével bir, melynél tehát f_1 és f_2 pozitiv előjele miatt I) képletben az előjelek változatlanul megmaradnak. A lencse gyujtó távolsága tehát

$$f \begin{smallmatrix}\geq 0\\ \leq 0\end{smallmatrix} \infty \text{ a szerint, a mint } \frac{N}{N'} f_2 + f_1 \gtreqless d.$$

Az eddigi felfogás szerint a lencse az első esetben gyűjtő, az utolsóban szóró lenne, a mi azonban igen vastag lencsénél helytelen.

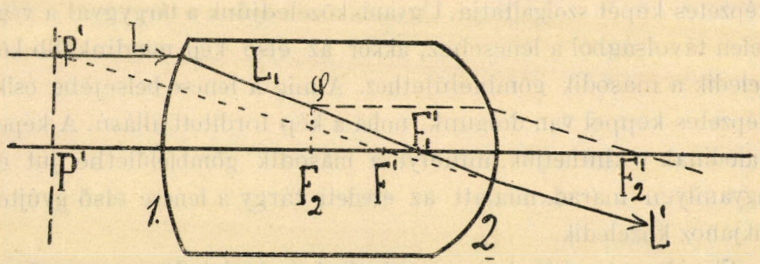
A könnyebb magyarázat végett induljunk ki a teleszkopikus beállitásból, melynél $f = \infty$. Ekkor nyilván összeesnek a lencse belsejében fekvő gyujtópontok, nevezetesen az első felület második



2. ábra.

gyujtópontja F'_1 (2. ábra) összeesik a második felület első gyujtópontjával F_2-vel.

Közelitsük az első gömbfelületet (1) a másodikhoz (2), de úgy, hogy F'_1 pont el ne érje a második gömbfelületet, a mint a 3. ábrá-



3. ábra.

ban elő van tüntetve, akkor a régi felfogás szerint az előjelből itélve a lencse gyűjtő lenne, holott kétségtelenül szóró. Mert a kép, melyet az első felület a végtelen távolságban lévő tárgyról alkot, a második felülethez a gyujtópontnál (F_2) közelebb esik, ez esetben pedig a második felület mindig képzetes képet alkot. A kilépő sugarak irányának megszerkesztésére felvehetjük az F_2 ponton átfektetett gyujtósiknak φ pontját, melyet világitónak tekintve, a belőle kiinduló, a tengelylyel párhuzamos sugarat használjuk; ez a lencséből kilépve, F_2' gyujtópont felé tart. Minthogy a kilépő sugár L' párhuzamos az utóbb húzott irányhoz, kétségtelen, hogy a kilépő sugarak, melyek párhuzamosan beeső sugarakból keletkeznek, divergensek, hogy tehát valódi képről szó sem lehet. A lencse második gyújtópontja a kilépő L' sugár *meghosszabbításában* F' pontban fekszik, tehát okvetlenül képzetes. Mind a mellett a gyújtó távolság pozitiv előjelü. Ugyanis a második fősíknak, melytől a második gyújtó távolságot (f) számitjuk, egyik pontját az L és L' sugarak metszési pontja p' képezi. Az ábrából kitünik, hogy a felvett esetben a gyújtópont F' a második főponttól, P' ponttól jobbra esik (azaz a fény haladási irányába), az elfogadott megállapodás szerint tehát a gyújtótávolság $(P'F'=f)$ pozitiv jelü.

A szóban forgó esetben, melyben d kisebb a belső gyújtó távolságok összegénél, de nagyobb az első rész gyújtótávolságánál,

$$\frac{N}{N'}f_2+f_1>d>f_1$$

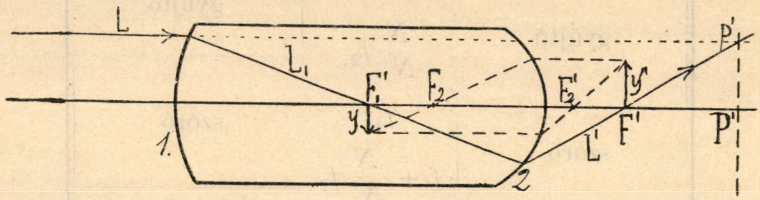
a lencse bizonyos határig a *véges távolságban* lévő tárgyaknak is képzetes képét szolgáltatja. Ugyanis közeledjünk a tárgygyal a végtelen távolságból a lencséhez, akkor az első kép mindinkább közeledik a második gömbfelülethez. A mig a lencse belsejébe esik, képzetes képpel van dolgunk, noha a kép forditott állású. A képet valódinak tekinthetjük, mihelyt a második gömbfelületbe jut és ugyanilyen marad, mialatt az eredeti tárgy a lencse első gyújtósikjához közeledik.

Figyelemre méltó, hogy a virtuális kép átalakulása *ugyanolyan állású* valódi képpé másképp történik, mint az egyszerű törőfelületnél, a hol a képtávolság közben végtelenné válik és hogy az átalakulás szorosan összefügg egy olyan metszési pontnak az eltünésével, melyet a megtört L_1 sugár a *rendszer belsejében* a tengelylyel képez.

3. Térjünk át arra az esetre, melyben a lencse vastagsága nagyobb a belső gyújtó távolságok összegénél,

$$d > \frac{N}{N'} f_2 + f_1.$$

Ekkor a végtelen távolságban lévő eredeti tárgynak az a képe y, melyet az első gömbfelület a lencse belsejében előállít, a második gömbfelülettől távolabb esik, mint ennek gyújtópontja F_2, a kilépő sugaraktól (L') alkotott kép y' tehát szükségkép valódi. De ez a kép most rendes állású, mert a második felület visszafordítja az első felület alkotta képet. A 4. ábrában a kép helye a szakadozott sugarakkal van megszerkesztve.



4. ábra.

A gyújtótávolság előjele természetesen negativ, a mint a képlet is kivánja. Ugyanis vegyük szemügyre a tengelylyel párhuzamosan érkező L sugarat, mely a lencse belsejében mint L_1 sugár F_1' gyújtóponton halad át és kilépve mint L' sugár a tengelyt y' kép talppontjában, a lencse második gyújtópontjában (F') metszi. A második fősík egyik pontja p', az L és L' irányok metszési helye. A gyújtótávolság $F'P' = f$ negativ jelü, mert P' ponttól balra esik. A gyújtótávolság negativ előjele a rendes állású képpel kapcsolatban, itt is azzal a körülménynyel függ össze, hogy a sugarak a szerkezet belsejében metszik a tengelyt, hogy tehát belül valódi kép keletkezik.

A végtelenből közeledő tárgy képére hasonló megjegyzések érvényesek, mint az előbb tárgyalt esetben.

4. Hogyha a fény a lencsén ellenkező irányban halad át és ha a két gömbfelület külömböző, a lencse optikai hatása általában eltérő; lehet a lencse az egyik helyzetben (1) (2) gyűjtő, az ellenkezőben (2) (1) szóró. A lencse a végtelenben lévő tárgynak mindkét helyzetben forditott állású valódi képét adja, a mig d kisebb, mint

a belső gyujtótávolságok közül a kisebbik (legyen ez $\frac{N}{N'} f_2$), szintúgy mindkét helyzetben ad rendes állású valódi képet, a míg d nagyobb a belső gyujtótávolságok abszolut értékeinek összegénél, ellenben majd gyűjtő, majd szóró a közbeeső értékeknél, a mint a következő összeállításból kitűnik.

(1) (2)	d	(2) (1)
	0	
gyűjtő		gyűjtő
	$\frac{N}{N'} f_2$	
gyűjtő		szóró
	f_1	
szóró		szóró
	$f_1 + \frac{N}{N'} f_2$	
gyűjtő	∞	gyűjtő

Két gyűjtő lencse.

5. Ugyanazok a viszonyok ismétlődnek a két gyűjtő lencséből alkotott szerkezeteknél, a milyenek a csillagászati távcső és a mikroszkop és itt könnyebben szemléltethetjük következtetéseink helyességét kisérleti úton, mint egyetlen igen vastag lencsénél.

Állitsuk a két lencsét először szorosan egymás mellé és távolitsuk el őket egymástól fokozatosan, akkor a képeken a következő változásokat tapasztaljuk.

A végtelenben képzelt tárgy képe fordított állású valódi, mindaddig, míg a második lencsének külső lapját el nem éri. Innen kezdve a fordított kép képzetes, míg a rendszer teleszkopikussá nem válik. Azontúl a kép mindig rendes állású és valódi. Ezzel ellentétben a gyújtótávolság II) képletből pozitiv jelü, míg a lencsék a teleszkopikus helyzetbe nem jutnak ($d < f_1 + f_2$), az előjelből itélve tehát a szerkezetnek állandóan gyüjtőnek kellene lenni;

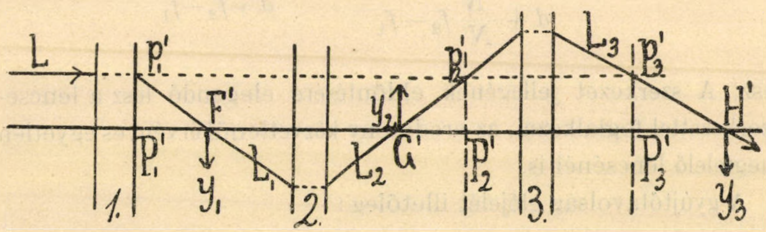
a teleszkopikus beállitáson túl a gyújtótávolság negativ jelü $(d > f_1 + f_2)$, a szerkezetnek tehát szórónak kellene lenni; a mint láttuk, mindkét következtetés helytelen.

Három gyüjtőlencséből alkotott szerkezet.

6. A mondottak szerint az eredő rendszer második gyújtótávolságának előjele nem dönti el, gyűjtő vagy szóró rendszerrel van-e dolgunk, csupán azzal függ össze, hogy a kép rendes állású-e vagy forditott? Ugyanezt igazolja egy bonyolódottabb esetben a következő példa.

Állítsunk össze gyűjtőlencsékből közös tengelyű rendszert, oly módon, hogy minden következő lencse megforditsa az előtte álló szerkezettől származó képet, mindig valódi képet alkotva.

Kövessük útjában az 5. ábrában előtüntetett, a tengelylyel pár-



5. ábra.

huzamosan bevetődő L sugarat. A fősíkjaival megjelölt első lencse (1) F' gyújtósíkban adja a végtelen távolságban képzelt tárgynak forditott állású képét y_1; ezen rész második fősíkjának egyik pontja p_1', az L és L_1 irányok metszési helye és gyújtótávolsága $(P_1'F')$ pozitiv. A két első lencséből alkotott rendszer G' gyújtópontot szolgáltatja s az ott keletkező kép y_2 rendes állású. Ezen rendszer második fősíkjának egyik pontja p_2', az L és L_2 sugarak metszési helye. A gyújtótávolság most $G'P_2'$ s ez negativ jelü, mivel P_2' főponttól balra esik. Hozzávéve a harmadik lencsét, a kép ismét megfordúl, a fősík p_3' ponton megy át és a gyújtótávolság $P_3'H'$ pozitiv előjelü lesz és így tovább. Forditott állású képnél a gyújtótávolság mindig pozitiv, rendes állású képnél mindig negativ. A képek azonban a felvett esetben mind valósak és így világos, hogy a gyújtótávolság negativ előjele nem jellemző a képzetes gyújtótávolságra és a szóró hatásra.

Konvex-konkav lencse.

7. Térjünk át a domború homorú lencse esetére, melyben a domború felület a gyűjtő, a homorú felület a szóró szerepét játsza. Az eset ugyanaz, mint egy gyűjtő és egy szóró lencséből álló összetett szerkezetnél, a milyen az achromatikus lencsepár és a Galilei-féle távcső esete.

Midőn a gyűjtő rész elül van, az I) és II) képletekben f_2 előjelét az ellenkezőre kell változtatnunk, mi által:

$$f = \frac{f_1 f_2}{d + \frac{N}{N'} f_2 - f_1} \quad \text{ill.} \quad f = \frac{f_1 f_2}{d + f_2 - f_1}$$

lesz. A szerkezet jellegének eldöntésére elegendő lesz a lencse-szerkezettel foglalkozni, az eredmény közvetlenül érvényes egyetlen megfelelő lencsénél is.

A gyújtótávolság előjelét illetőleg:

$$f \gtreqless_{0}^{0} \infty \text{ a szerint, a mint } d + f_2 \gtreqless f_1.$$

Foglalkozzunk a következő két esettel.

a) Az első esetben legyen $f_2 > f_1$, a mi az achromatikus lencse-párnál és a középen vastagabb domború homorú lencsénél fordul elő. Igen távol lévő tárgynak a következő képeit tapasztaljuk.

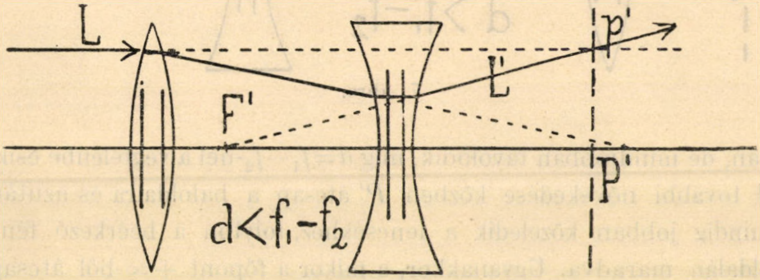
Midőn a két lencse közvetlenül egymás mellett van, a szerkezet a gyűjtőlencse túlnyomó hatása miatt gyűjtő lesz. Mialatt a lencsék egymástól eltávolódnak, a kép mindaddig forditott állású valódi marad, míg a szórólencsének külső lapjával össze nem esik. További eltávolitásnál a kép virtuálissá válik és mindvégig az marad, mert a szórólencse az első lencsétől alkotott valódi képet azontúl mindig képzetessé alakitja át.

A rendszer fordított helyzetében a kép mindig valódi, mert a szórólencsétől származó kép már $d=0$ esetében is a gyűjtőlencse gyújtópontján kívül fekszik s ez még fokozódik, ha d a nullától eltér.

A képlet a lencsék minden távolságánál pozitiv gyújtótávolságot szolgáltat, tehát itt is azt találjuk, hogy a gyújtótávolság előjele nem állapítja meg a szerkezet gyűjtő vagy szóró hatását.

b) A második esetben legyen $f_1 > f_2$, a mi a Galilei-féle távcsőnek és a széleken legvastagabb domború-homorú lencsének felel meg.

Midőn a két lencse szorosan egymás mellett van, a szerkezet, a második lencse túlnyomó hatása miatt, szóró. Mialatt a lencsék



6. ábra.

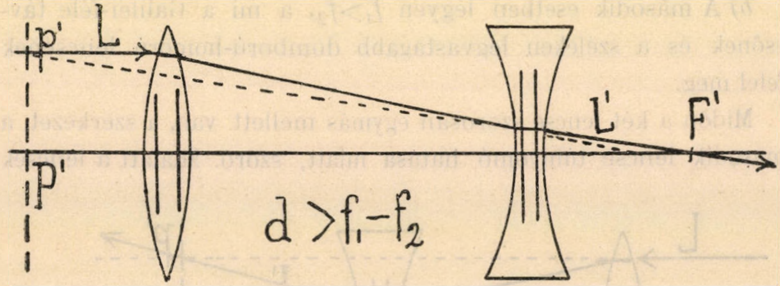
egymástól távolódnak, a párhuzamos sugaraktól származó, a rendszerből kilépő sugarak folyton kevésbbé divergensek lesznek, míglen a teleszkopikus beállításhoz ($d=f_1-f_2$) jutunk, melynél a kilépő sugarak egymáshoz párhuzamosak. A távolság (d) további növekedése közben a kilépő sugarak konvergensek lesznek, tehát valódi kép keletkezik, mindaddig, míg a kép a szórólencsének külső felületébe nem jut. Ezentúl ismét csak képzetes kép fordul elő, noha a gyújtótávolság előjele állandóan pozitiv marad.

A szerkezet fordított helyzetében közel álló lencsék szintén szóró rendszert képeznek, mely azonban d növekedése közben a teleszkopikus beállításon túl gyűjtővé válik és az is marad.

Az ellenkező fekvésben mutatkozó eltérő magatartás itt is, a többi esetekben is, a fősíkok egyoldalú fekvésével és vándorlásukkal függ össze. Erre nézve a 6. és 7. ábrában elő van tüntetve a második főpont P' és a második főgyújtópont F' helyzete.

Ezen ábrákat szem előtt tartva, könnyen áttekinthetjük a következő átalakulást.

Mialatt d nullától f_1-f_2-ig növekszik, a második főpont P' a 6. ábra szerint mindig jobbra esik; eleinte a lencsék közelében



7. ábra.

van, de mindjobban távolódik, míg $d=f_1-f_2$-nél a végtelenbe esik, d további növekedése közben P' átcsap a baloldalra és azután mindig jobban közeledik a lencsékhez, folyton a beérkező fény oldalán maradva. Ugyanakkor, a mikor a főpont $+\infty$-ből átcsap $-\infty$-be, a képzetes kép is átalakul valódivá.

Bikonkav lencse.

8. Jóval egyszerűbb az eset két szórólencse egyesitésénél, illetőleg egyetlen kétszer homorú lencsénél, a hol mind a két felület szóró hatású. Minthogy az egyes részek külön valódi tárgynak csak képzetes képét szolgáltatják, az egyesített rendszer is csak szóró lehet.

Általános szabály.

9. Az előadottakból kitünik, hogy az összetett optikai szerkezetek gyűjtő vagy szóró jellegét megállapitani nem olyan egyszerű, mint a hogy eddig tárgyalták; mert a jelleg nemcsak a fősíkok és

gyújtósíkok fekvésétől, hanem a határközegek fekvésétől és a fény terjedési irányától is függ. Ugy látszik nem lesz könnyű, a jelleget meghatározó általános szabályt fölállítani, némi tájékozást mégis nyújtanak a következő tételek.

a) Midőn a rendszer belsejében sehol sem keletkezik valódi kép, más szóval a tárgynak a tengelyben lévő pontjából származó sugarak a rendszer belsejében sehol nem metszik a tengelyt, a rendszer gyűjtő vagy szóró, a szerint, a mint a második gyújtótávolság pozitiv vagy negativ, éppen úgy, mint egyetlen gömbalakú törőfelületnél vagy vékony lencsénél.

b) Hogy ha ellenben a rendszer belsejében egy vagy több valódi kép keletkezik, a rendszer jellege attól függ, hogy az «utolsó valódi képről» — bármely közegben is keletkezzék az — az utána következő rész valódi vagy képzetes képet állít-e elő? Az egész rendszer csak akkor gyűjtő, ha annak az «utolsó valódi képet» követő része gyűjtő természetű és ha azonkívül az «utolsó valódi kép» a gyújtóponton kívül esik. A teleszkopikus beállítástól eltekintve a rendszer minden más esetben szóró.

c) Az eredő kép rendes vagy fordított állását szintén amaz «utolsó valódi kép» állásából itélhetjük meg; ugyanis a kilépő sugaraktól alkott kép az «utolsónak» jelzett képpel egyenlő állású, mikor az egész szerkezet szóró, ellenkező állású, mikor a rendszer gyűjtő.

A kisérleti bemutatásra vonatkozó megjegyzések.

10. Lehetőleg erős párhuzamos fénysugaraknak az előállítására a következő összeállítást használjuk.

Az ívlámpa pozitiv sarkához közel (2—3 cm) szűk nyilású fémlapot teszünk és a nyiláson áthatoló divergens sugarakat achromatikus lencsével párhuzamossá teszszük. Midőn a tüneményt csupán a vízszintes síkban figyeljük meg, kerek nyilás helyett vízszintes rést használunk, miáltal a fényerő tetemesen fokozódik, a nélkül, hogy a tünemény élessége szenvedne. A képek rendes vagy fordított állását azáltal szemléltethetjük, hogy a rés egyik végén még kerek nyilást is készítünk.

Az ekként keletkező sugárnyaláb útjába teszszük azon lencsét vagy lencseszerkezetet, melynek optikai magatartását akarjuk szemléltetni.

A sugárnyalábot azáltal tehetjük láthatóvá, hogy nagyobbfajta főzőpohárnak a nyilását sík üveglappal lazán befödjük és a hézagokon kevés füstöt fúvunk belé. A füstös poharat a fény útjába helyezve, a sugárnyaláb alakját távolról is megfigyelhetjük, akár a síklappal, akár a hengerfelülettel fogjuk fel a fényt.

Schuller Alajos.

HÁROM TETRAÉDER HIPERBOLIKUS KAPCSOLATBAN.

(Első közlemény.)

I. Az általánosabb eset tárgyalása.

1. *A probléma felállítása és jelölések.**

Ha adva van három tetraéder: $A'B'C'D'$, $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ oly helyzetben, hogy a megfelelő szögpontok egy-egy egyenesen feküsznek és e négy p', q', r' és s' egyenes egy hiperbolikus sugársorba tartozik, úgy e három tetraéder közül bármely kettőnek megfelelő oldalsíkjai négy hiperbolikus sugárban metszik egymást: kérdés, minő kapcsolatban áll egymással az így nyert három hiperbolikus sugársor, illetőleg az általuk meghatározott három hiperbolikus másodrendű felület?

Az egyes szögpontokkal szemben eső oldalsíkokat a megfelelő görög betűkkel jelölvén, az első tetraéder oldalsíkjai: α', β', γ', δ', a másodikéi: α, β, γ, δ, a harmadikéi: α_1, β_1, γ_1, δ_1.

Legyen továbbá:

$$\overline{\alpha'\alpha}\equiv p,\ \overline{\beta'\beta}\equiv q,\ \overline{\gamma\gamma'}\gamma'\gamma\equiv r,\ \overline{\delta'\delta}\equiv s,$$

$$\overline{\alpha'\alpha_1}\equiv p_1,\ \overline{\beta'\beta_1}\equiv q_1,\ \overline{\gamma'\gamma_1}\equiv r_1,\ \overline{\delta'\delta_1}\equiv s_1,$$

$$\overline{\alpha\alpha_1}\equiv p_2,\ \overline{\beta\beta_1}\equiv q_2,\ \overline{\gamma\gamma_1}\equiv r_2,\ \overline{\delta\delta_1}\delta\delta_1\equiv s_2,$$

$$(\alpha'\alpha\alpha_1)\equiv P,\ (\beta'\beta\beta_1)\equiv Q,\ (\gamma'\gamma\gamma_1)\equiv R,\ (\delta'\delta\delta_1)\equiv S.$$

Nevezzük azt a hiperbolikus másodrendű felületet, melynek egyik alkotó-sorába tartozik a p', q', r' és s' egyenes, H'-nek; ép

* L. e lapok 1899. évfolyamában «Megfelelő háromszögek és tetraéderek polárterekben» czimű két közleményt.

úgy H-nak, H_1-nek, H_2-nek nevezzük azokat a hiperbolikus másodrendü felületeket, a melyeknek egyik alkotó sorába tartozik a p, q, r, s, illetőleg p_1, q_1, r_1, s_1 és végre p_2, q_2, r_2, s_2 sugár.

Feladatunk e szerint e H, H_1, H_2 felületek kapcsolatának vizsgálata.

2. *A három tetraédertől páronkint meghatározott polárrendszerek.*

E tetraéderek páronkint polárrecziproczitást állapitanak meg két tér közt. Nevezetesen a Σ' és Σ tér között fennálló polárrecziproczitásban az elemek összetartozandósága a következő képlettel van megadva:

$$(A'B'C'D'\alpha'\beta'\gamma'\delta'p'q'r's' \ldots) \barwedge (\alpha\beta\gamma\delta ABCDpqrs \ldots) \qquad \text{I)}$$

ép úgy Σ' és Σ_1 térre nézve:

$$(A'B'C'D'\alpha'\beta'\gamma'\delta'p'q'r's' \ldots) \barwedge (\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1A_1B_1C_1D_1p_1q_1r_1s_1 \ldots) \qquad \text{II)}$$

és a Σ' és Σ_2-re nézve:

$$(ABCD\alpha\beta\gamma\delta p'q'r's' \ldots) \barwedge (\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1A_1B_1C_1D_1p_2q_2r_2s_2 \ldots) \qquad \text{III)}$$

Az első polárrendszert Π-nek, a másodikat Π_1-nek, a harmadikat Π_2-nek nevezvén, kérdjük, minő kapcsolatban van e három polárrecziproczitás?

E kérdés eldöntésére vizsgáljuk meg tüzetesebben valamely pontsornak megfelelő siksorok kapcsolatát. Vegyük pl. a p' pontsort. E pontsor A' pontjának Π-ben α, Π_1-ben α_1 felel meg, a Π_2-ben megfelelő sik nincs adva, de tudjuk, hogy az áthalad a p'-nek e polárrendszerben megfelelő p_2 egyenesen, azaz α és α_1 sikok metszésvonalán. Vagyis az A' pontnak e három polárrendszerben megfelelő síkok egy egyenesben találkoznak. Ugyanezt látjuk a Σ'-höz sorozott A és A_1 pontoknak megfelelő síkokról is, melyek a p_1 ill. p egyenesben találkoznak. Ámde a p' pontsor többi pontjainak megfelelő síkokról is ezt mutathatjuk ki.

Vegyük azt a E' pontot, melyben α' metszi p'-t és nevezzük a Π, Π_1, Π_2 polárrendszerekben neki megfelelő sikokat ε, ε_1 ill. ε_2-nek.

Minthogy

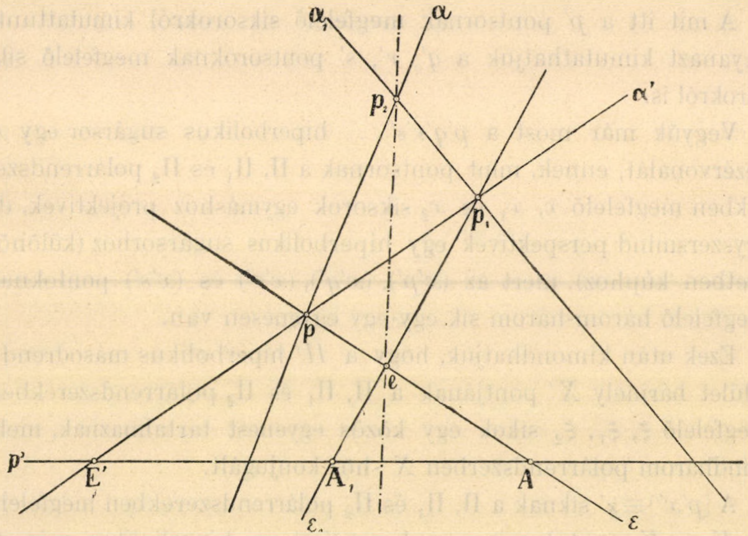
$$E' \equiv (\alpha' p'),$$

azért

$$\varepsilon \equiv [Ap]$$

$$\varepsilon_1 \equiv [A_1 p_1].$$

Legyen e két sík metszése e, úgy P pontban p, p_1, p_2 és e egyenesek egy teljes négyélt alkotnak, melynek szemben fekvő oldalsíkjai a p' egyenest egy involuczió párjaiban metszik. (L. az ábrát, mely e teljes négyélnek egy metszetét tünteti föl a p'-en keresztül tett síkkal.)



E négyél szemben fekvő oldalsíkpárja α_1 és ε, a másik α és ε_1, míg a harmadik pár α' és $[ep_2]$. Minthogy pedig az ε_2 a p_2 síksorban van és a Σ'-höz sorozott $AA_1E'\dots$ pontsor a Π_2-ben neki megfelelő $\alpha_1\alpha\varepsilon_2\dots$ síksorhoz involutorius helyzetű, azért:

$$[ep_2] \equiv \varepsilon_2.$$

Tehát a p' pontsorban találtunk négy A', A, A_1 és E' oly pontot, melynek a három polárrendszerben megfelelő síkok egy egyenesben találkoznak, de akkor e pontsor minden elemére ugyanez áll. Ugyanis a p' pontsornak a Π és Π_1 polárrendszerekben megfelelő p és p_1 síksorok projektivek úgy a p'-höz, mint egymáshoz, képződményük tehát egy másodrendű (kúp) pontbeli sugársor P^2, mely szintén projektiv a p'-höz.

A p' pontsornak Π_2-ben megfelelő p_2 siksor szintén projektiv p'-höz, tehát a P^2-hoz is. Minthogy pedig a p_2-nek háromnál több sikja tartalmazza a P^2 kúp megfelelő alkotóját, azért e két alakzat perspektiv, azaz a p_2-nek minden sikja keresztülmegy a P^2 megfelelő alkotóján,* más szóval a p' pontsor bármely elemének a Π, Π_1 és Π_2 polárrendszerekben megfelelő három sik egy egyenesen van.

A mit itt a p' pontsornak megfelelő siksorokról kimutattunk, ugyanazt kimutathatjuk a q', r', s' pontsoroknak megfelelő siksorokról is.

Vegyük már most a $p'q'r's'$ ... hiperbolikus sugársor egy x' vezérvonalát, ennek, mint pontsornak a Π, Π_1 és Π_2 polárrendszerekben megfelelő x, x_1 és x_2 siksorok egymáshoz projektivek, de egyszersmind perspektivek egy hiperbolikus sugársorhoz (különös esetben kúphoz), mert az $(x'p')$, $(x'q')$, $(x'r')$ és $(x's')$ pontoknak megfelelő három-három sik egy-egy egyenesen van.

Ezek után kimondhatjuk, hogy a H' hiperbolikus másodrendű felület bármely X' pontjának a Π, Π_1 és Π_2 polárrendszerekben megfelelő ξ, ξ_1, ξ_2 sikok egy közös egyenest tartalmaznak, mely mindhárom polárrendszerben X'-höz konjugált.

A $[p'x'] \equiv \varkappa'$ siknak a Π, Π_1 és Π_2 polárrendszerekben megfelelő K, K_1 és K_2 pontok rajt vannak egyrészt egy hiperbolikus másodrendű felületen, melynek egyik alkotósora az x' pontjainak többszörösen konjugált sugarakból áll, másik alkotósorába pedig bele tartozik az x' polárisa a Π, Π_1 és Π_2 polárrendszerre vonatkozólag, másrészt a P^2 kúpon. E két felület a $(p'x')$ pontnak többszörösen konjugált egyenesen kívül egymást egy k harmadrendű görbében metszi, melyen a K, K_1 és K_2 pont rajta van. A k húrjaiból alakuló elsőrendű és harmadosztályú sugárkongruencziába beletartozik a p' és x' pontjaihoz többszörösen konjugált minden sugár.

---

* REYE: Geom. d. Lage. Dritte verm. Auflage. I. kötet, 130. l.

A $\varkappa'$ pontsíknak a Π ill. Π_1 polárrendszerben megfelelő K ill. K_1 síkpontok egymáshoz projektivek és képződményük egy elsőrendű és harmadosztályú sugárkongruenczia, mely a k húrkongruencziájával azonos, mert egy hiperbolikus sugársor és egy kúp alkotósorát e két kongruenczia közösen tartalmazza.

A $\varkappa'$-nek Π_2-ben megfelelő K_2 síkpont szintén projektiv a K és K_1 síkpontokhoz és pedig úgy, hogy e síkpontok három-három megfelelő síkja a k egy húrjában találkozik.

Ugyanis mivel a K_2 pont rajta van a k görbén, ha abból ennek húrkongruencziáját projicziálom, úgy egy K_2' síkpontot kapok, mely K-hoz és K_1-hez projektiv olykép, hogy e három síkpont azon síkjai felelnek meg egymásnak, melyek a kongruencziának ugyanazon sugarát projicziálják. De akkor még ezen K_2' síkpont a vele egyesített K_2 síkponthoz is projektiv, sőt avval azonos, mert a p' és x' pontjainak Π_2 polárrendszerben megfelelő síkok e két síkpont megfelelően közös elemei.

Ezzel azonban bebizonyítottuk, hogy nemcsak a H' minden pontjának, hanem tetszőleges érintő síkja és így *az egész tér bármely pontjának a Π, Π_1 és Π_2 polárrendszerekben megfelelő síkok egy egyenesben találkoznak.*

3. *Egy másodrendű és másodosztályú sugárkomplexus.*

Eddigi eredményeinkből még fontos következtetéseket vonhatunk. Ugyanis a Π és Π_1 polárrecziproczitás által a Σ' tér projektiv vonatkozásba van hozva a Σ és Σ_1 terekkel, melyek tehát szintén projektivek egymáshoz. Ha két ily térnek legfölebb négy megfelelően közös pontja és ugyanannyi síkja van, úgy képződményük egy Γ másodrendű és másodosztályú sugárkomplexus oly értelemben, hogy ennek minden sugara a projektiv terek két megfelelő pontjának és egyszersmind síkjának közös egyenese.* Ebből e komplexus-sugarak ama jellemző tulajdonsága következik, mely szerint mindenik a projektivitásban neki megfelelő sugarat metszi, bármelyik térhez sorozzuk is.

---

* Lásd Reye idézett munkája III. kötetének elejét.

Nyilvánvaló tehát, hogy a $p', q', r', s', p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2$ egyenesek e Γ komplexus sugarai.

A projektiv tereknek egyszerűen végtelen sokasága — *sora* — van, melyből bármely kettőnek képződménye ugyanezen Γ komplexus és a mellett bármely sík, az egyik pl. Σ térhez soroztatván, a többiben neki megfelelő síkokkal egy elsőrendű síksort alkot.

Ha már most a Σ' tér ezen $\Sigma\Sigma_1\Sigma_2\ldots$ projektiv térsor két teréhez polárrecziprok, úgy valamennyihez is az.

Ezt az egyszerűen végtelen sok polárrendszert a polárszisztémák egy *sorának* nevezzük.

E sorra nézve jellemző, hogy a tér bármely pontjának e polárrendszerekben megfelelő síkok elsőrendű síksort alkotnak, melynek sorozó egyenese a Γ komplexus egy sugara. Kivételt e tekintetben csak a $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2\ldots$ projektiv terek megfelelően közös L, M, N, O pontjai képeznek. Ezek a Γ komplexus főtetraéderét alkotják, mely a $\Pi, \Pi_1, \Pi_2\ldots$ polárrendszerek közös polártetraédere.

Az előbbi pont eredményét már most a következőképen mondhatjuk ki:

A három hiperbolikus viszonyban levő tetraéder által páronkint meghatározott Π, Π_1, Π_2 polárrendszerek egy sorba tartoznak.

4. *Egy másodrendű és hatodosztályú sugárkongruenczia.*

A H' felületnek a $\Pi\Pi_1\Pi_2\ldots$ polár-rendszersorban megfelelő egyszerűen végtelen sok hiperbolikus másodosztályú felület felületsort alkot. E $H, H_1, H_2, \ldots$ felületek egymáshoz mind projektivek és a H minden η érintő síkja a neki megfelelő $\eta_1, \eta_2, \ldots$ érintő síkokkal egy elsőrendű síksort alkot, melynek sorozó egyenese a komplexbe tartozik, mert ezen érintő síkok a H' felület ugyanazon pontjának polársíkjai a polárrendszer-sorban.

A H' összes pontjainak ilykép többszörösen konjugált egyenesek egy ∞^2 sokaságot, azaz egy sugárkongrueneziát alkotnak, melylyel bővebben kell foglalkoznunk.

Ha a Σ'ponttér tetszőleges X' pontjának megfelelőül veszem a Γ komplex azt a sugarát, mely a $\Pi, \Pi_1, \Pi_2\ldots$ polárrendszerek mindenikében hozzá konjugált, úgy a Σ' ponttér a Γ komplexszel projektiv vonatkozásba van hozva. A Σ' minden pontjának megfelel a Γ komplexnek egy és csakis egy sugara. Kivételesek a komplexus főpontjai. Ugyanis a főtetraéder L, M, N, O szögpontjaihoz e tetraéder szemben fekvő λ, μ, ν, o oldalsíkjának minden sugara többszörösen konjugált.

A Σ' egy tetszőleges e' pontsorának, mely a főpontok egyikét sem tartalmazza, a Γ komplexusban egy hiperbolikus sugársor vagy egy másodrendű kúp alkotósora felel meg a szerint, a mint e' nem tartozik a komplexusba, vagy pedig annak egy sugara.

E hiperbolikus sugársor vezérsugarai, illetőleg e kúp alkotói az e'-nek polárisai a $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots$ polárrendszerekben.

Egy σ' síknak, mely nincs a főpontok egyikében sem és nem esik össze egy fősíkkal sem, a Γ-ban egy harmadrendű térgörbe húrkongruencziája felel meg; e harmadrendű görbét, melynek minden húrja komplexsugár, a komplex egy *sorozó* görbéjének nevezzük. Ha σ' sík valamely főpont egy síkja, úgy e kongruenczia szétesik a megfelelő fősík összes egyeneseinek nulladrendű, első osztályú kongruencziájára és egy másodrendű, másodosztályu kongruencziára. Ha pedig σ' a fősíkok egyike, úgy a pontjainak megfelelő komplexsugarak a megfelelő főpont és a többi fősík összes egyenesei.

A tetszőleges e komplexussugárnak a Σ' térben megfelelő pont közös pontja az e polárisainak és egyszersmind az e pontjaihoz többszörösen konjugált sugaraknak.

A tetszőleges X pontban levő összes komplexsugaraknak — az X komplexuskúpjának — Σ'-ben megfelel egy egyenes, mely maga is a komplexbe tartozik. Ugyanis az X ponthoz a $\Pi, \Pi_1, \Pi_2 \ldots$ polárrendszerekben többszörösen konjugált x' komplexussugár tekinthető a Σ' tér egy pontsorának, melynek a Γ-ban megfelelő sugarak az X pont komplexkúpját adják.

Hasonlóképen egy σ sík komplexsugarainak a Σ'-ben egy harmadrendű pontsor — a Γ egy sorozó görbéje — felel meg. Mert vévén e síkban két f, g komplexussugarat, ezeknek megfelel Σ'-ben F', G' pont, a σ egy tetszőleges e komplexussugarának megfelelő pont pedig az (ef) és (eg) ponthoz többszörösen konjugált sugarak metszéspontja. Így a σ összes komplexussugarainak Σ'-ben megfelelő pontok az F' és G' komplexuskúpjainak közös pontjai. Minthogy pedig e két komplexuskúp az (fg) pontnak megfelelő komplexussugarat közösen tartalmazza, a többi közös pont egy harmadrendű térgörbét alkot, mely a komplexusnak sorozó görbéje és a mely egyszersmind geometriai helye a σ sík polusainak a Π, Π_1, Π_2, . . . polárrendszerekre vonatkozólag.

Nevezzük már most a H' felület pontjaihoz többszörösen konjugált sugarakat III-as sugaraknak, a belőlük alakult sugárkongruencziát K_{III}-nak.

E kongruenczia másodrendű és hatodosztályú. Ugyanis a tér tetszőleges X pontjában levő komplexsugaraknak a Σ' térben egy x' elsőrendű pontsor felel meg, mely H' felületet két pontban metszi, tehát az X pontban két III-as sugár van.

A tetszőleges σ sík komplexussugarainak pedig a Σ'-ben egy harmadrendű térgörbe felel meg, mely H'-t legfölebb hat pontban metszi, tehát a σ síkban legfölebb hat III-as sugár van.

A komplexus főpontjai szingularis pontok. Az egyik pl. λ fősík a H'-t egy kúpszeletben metszi, ennek a Π polárrendszerben egy kúpot burkoló másodrendű síksor, a Π_1-ben az előbbihez projektiv másodrendű síksor felel meg az L főpontban. Ezeknek képződményük egy negyedrendű kúp, melynek minden alkotója III-as sugár. Tehát az L és ép úgy a többi főpont is szinguláris pontja a kongruencziának.

Szinguláris pontok továbbá a P, Q, R, S; mert a p', q', r', s' pontsoroknak, mivel sorozójuk a komplexbe tartozik, a Γ-ban egy-egy komplexuskúp alkotói felelnek meg, melyek mind III-as sugarak, tehát csúcsaik szinguláris pontok.

Ha volna ezen $p'q'r's'$ . . . hiperbolikus sugársorban még komplexussugár, úgy ahhoz is tartoznék egy ilyen szinguláris pont. Ámde minden komplexsugár, mint a Σ tér egy sugara, metszi a Σ_1 térben neki megfelelő sugarat; a Σ térhez sorozott $p'q'r's'$ . . . hiperbolikus sugársorban pedig legfölebb négy oly sugár van, mely a Σ_1 térben neki megfelelőt metszi. Ha több is volna, úgy valamennyi metszené megfelelőjét; e fontos különös esetre később fogunk kiterjeszkedni, azért ezt egyelőre tárgyalásunkban mellőzzük.*

Ép úgy, mint a $p'q'r's'$ ... hiperbolikus sugársorban, ennek vezérsugársorában is legfölebb négy van: t', u', v', z', mely a komplexusba tartozik, megjegyezvén, hogy ezek páronkint képzetesek is lehetnek.

Ezen utóbbi sugaraknak többszörösen konjugált T, U, V, Z pontok szinguláris pontjai a K_{III} kongruencziának, mert komplexuskúpjuk minden alkotója III-as sugár.

A P, Q, R, S, T, U, V, Z pontok rajta vannak a HH_1H_2 ... felületsorba tartozó mindenik felületen.

Még kimutathatjuk, hogy e nyolcz ponton kivül nincs több közös pontja a H, H_1, H_2, ... felületnek. Tegyük, hogy van X, úgy e pontnak, mint a Σ, Σ_1, Σ_2, ... terek pontjának Σ'-ben megfelel a H' ξ, ξ_1, ξ_2, ... érintősikja. Mivel pedig Σ' a Σ, Σ_1, Σ_2, ... terekkel polárrecziprok, ha az X pontot Σ'-höz sorozom, neki a Σ, Σ_1, Σ_2, ... terekben ugyanezen ξ, ξ_1, ξ_2, ... síkok felelnek meg, tehát egy elsőrendű x' siksort alkotnak, melynek x' sorozó egyenese a H'-nek egy alkotója és egyszersmind komplexussugár, de H' alkotói között legfölebb nyolcz ilyen van t. i. p', q', r', s', t', u', v', z'.

Eddigi eredményeinket a következőkben foglalhatjuk össze:

A H, H_1, H_2, ... felületeknek csak nyolcz közös pontjuk van, egymáshoz projektivek, még pedig úgy, hogy megfelelő érintő síkjaik egy másodrendű és hatodosztályú K_{III} kongruenczia sugaraiban találkoznak; a P, Q, R, S pontok e kongruenczia szinguláris pontjai és p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2 e kongruenczia sugarai.

Skopál István.

---

* Itt megjegyezhetjük, hogy a P, Q, R, S pontok az általános esetben nem eshetnek egy sikba; mert feltéve, hogy ezek egy σ sikba esnek, azt találjuk, hogy e sík a pqr ..., $p_1q_1r_1$ ... és $p_2q_2r_2$ ... projektiv sugársorokat három projektiv másodrendű pontsorban metszi, melynek P, Q, R, S megfelelően közös pontja. De ha két projektiv kúpszeletnek négy pontja megfelelően közös, úgy valamennyi is az; így a föltétellel ellenkezőleg azt találnók, hogy a három projektiv hiperbolikus sugársor minden eleme metszi megfelelőjét.

ELEKTROMOS HULLÁMOK A VÍZBEN.

Jóllehet a kisérlet és elmélet egyaránt arra mutat, hogy a dielektromos konstans, a törésmutató és az abszorpczióindex közt szoros viszony van; hogy a testek molekuláris súlya, a nemjóvezetők kémiai konstitucziója és elektromelnyelőképessége közt összefüggés van; hogy az elektromos disperzió- és abszorpczióból — az elektromos spektrálanalizisből — majd ép úgy lehet a molekulák rezgéseire következtetnünk, mint a fénytani spektrálanalizisből az atomok rezgéseire: mégis a tiszta víznek elektromelnyelőképessége felől nagyon eltérők a nézetek, hézagosak az erre vonatkozó kisérletek.

Némelyek szerint a tiszta víznek csak a reflexiója nagy, de nincs elnyelőképessége, vagy oly kicsi, hogy nem lehet kimutatni; mások szerint a víz elnyelőképessége igen nagy; míg sokan a víznek anomális abszorpcziót tulajdonítanak, hogy az elektromos hullámoknak megfelelő rezgésszám nagyobbodásával, a víz elnyelőképessége is nagyobbodik.

Drude, ki e kérdéssel legtöbbet foglalkozott, még 1896-ban nem tudta a víznek elektromelnyelő képességét kimutatni; de 1898-ban már elméleti úton arra az eredményre jut, hogy jelentékeny elnyelést csak oly testeknél várhatunk, melyeknél E_∞, a dielektromos konstans, és E_0, a fénytani törésmutató négyzete közt nagy a különbség. Pedig a tiszta víznél ez a különbség elég nagy — $E_\infty = 81$, $E_0 = 1{\cdot}8$; — a víznek tehát igen nagy az elnyelőképessége, változik az elektomos hullám hosszával; maga az elnyelés anomális.

A tiszta víz elnyelése legnagyobb, ha elnyelőképességének indexe

$$\underset{\text{max.}}{\varkappa} = \sqrt{\frac{E_0+E_\infty-2\sqrt{E_0E_\infty}}{E_0+E_\infty+2\sqrt{E_0E_\infty}}} = 0{\cdot}74.$$

Az elnyelési index $\varkappa$ azzal van meghatározva, hogy az elektromos hullámok energiája $\frac{1}{e^{2\pi\varkappa}}$ arányban gyengül, ha egy hullámhossznak megfelelő utat tesz meg valamely testben; bármely z vastagságú rétegen való áthaladás után a gyengülés $= e^{-\frac{2\pi\varkappa z}{cT}}$.*

A hullámnak megfelelő rezgésidő, ha $\varkappa$ legnagyobb értékű,

$$T = a'\sqrt{\frac{E_0}{E_\infty}} = 12{\cdot}10^{-12},$$

hol a' egy állandó. Tehát a víz elnyelőképessége legnagyobb, ha az elektromos hullám hossza $\lambda = 0{\cdot}36$ cm.

Az elektromos hullám n törésmutatója, E dielektromos konstansa (ha T nem nagy; ha T nagy a konstans $= E_\infty$) és E_0 a fénytörés mutatójának a négyzete közt a következő viszony van:

$$E = E_\infty - \frac{E_\infty - E_0}{1+\left(\frac{T}{a'}\right)^2};$$

$$n = \sqrt{\frac{\eta+E}{2}}; \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{\eta-E}{\eta+E}},$$

hol

$$\eta = \sqrt{E_\infty^2 - \frac{E_\infty^2 - E_0^2}{1+\left(\frac{T}{a'}\right)^2}}$$

vagy

$$\varkappa = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

ha

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} = \frac{E_\infty - E_0}{E}\cdot\frac{\frac{T}{a'}}{1+\left(\frac{T}{a'}\right)^2}.$$

Ha T igen nagy

* Dr. P. Drude, Physik des Aethers, p. 572.

$$\varkappa=\frac{a'}{2T}\cdot\frac{E_\infty-E_0}{E_\infty};$$

ha T igen kicsiny

$$\varkappa=\frac{T}{2a'}\cdot\frac{E_\infty-E_0}{E_0};$$

az állandó

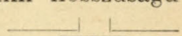
$$a'=T\sqrt{\frac{E_\infty-E}{E-E_0}}=\frac{TE_\infty-E}{2n^2\varkappa}=\frac{T2n^2\varkappa}{E-E_0}.^*$$

Minél kisebb tehát az elektromos hullám hossza, annál nagyobb az elnyelési index. A vízre vonatkozólag, ha $\lambda=10$ cm, $\varkappa=0{\cdot}12$; ha $\lambda=2$ cm, $\varkappa=0{\cdot}46$; ez adatokat W. D. Coolidge ** számította ki $a'=0{\cdot}82.10^{-10}$, $\lambda=147$ cm és $\varkappa=0{\cdot}0082$ adatok alapján.

Maga Drude, a kinek nyomdokain halad Coolidge is, nyiltan kimondja, hogy az eddig végzett kisérleti adatok nem elegendők arra, hogy teljes, határozott disperzióformulát lehessen felállítani az elektromos hullámokra, a dielektromos konstans, a törésmutató és az abszorpczióindex viszonyát illetőleg.

*

Az itt közlendő kisérleteim czélja: kimutatni a tiszta víz elektromelnyelőképességét, még pedig oly nagy hullámokkal is, a minőkkel e téren még sikerrel nem kisérleteztek — legalább tudtommal nem, — továbbá kimutatni eme elnyelőképesség nagyságának a változását az elektromos hullámok különböző hosszúsága szerint.

A vizen áthatolt, meggyengült elektromos hullámok kitüntetésére a Branly-féle csövet használtam. Egy decimeter hosszúságú és 0·6 cm átmérőjű üvegcsövet megtöltöttem 3 mm hosszúságú rézcsavarokkal, e koherert horganylemezből készült  cső közepén helyeztem el úgy, hogy a függőlegesen álló nyilás felett keltett elektromos hullám csak a függőleges nyiláson hatolhatott be, a vízszintes nyilás mindkét oldalon fémtokkal volt elzárva; a nyilás átmérője mindenütt 10 cm. A koherer két végét

* P. Drude, Wied. Ann. 64. 1898. p. 38.

** W. D. Coolidge, Wied. Ann. 69. 1899. p. 162.

ólomkábelek kötötték össze a Raoult-féle normálelemmel, az áramelágazásra berendezett ellenállásszekrénynyel és a Despretz-D'Arsonval-féle tükrös galvanométerrel. E készülékeket horganylemezből készült, a sugárzó elektromos energia ellen védő tokba helyeztem el; a galvanométert bezáró fémtokon csak oly nagyságú nyilás volt — de fémkupakkal ezt is elzárhattam, — a mekkorát a galvanométer tükre megkiván. Igy teljesen védve van az egész rendszer a sugárzó energia ellen; mert, ha a függőlegesen álló cső előtt keltem az elektromos hullámokat akkor, a mikor e nyilást egy reá tett horganylemez befedi, a galvanométer tűje állandóan 0°-ot jelez; a horganyfödő eltávolítása után keltett hullám a tűt állandóan 240 mm-nyire téríti ki.

A hullámkeltő készülékeket vagy Righi, vagy Hertz módszerének a módosításával készítettem. Kis hullámokat — 7·5 cm és 20 cm — úgy állítottam elő, hogy a megfelelő átmérőjű rézgolyókat — 1·36 és 4 cm — egy oldalcsővel ellátott üvegcsőbe tettem úgy, hogy e két golyó közé, az oldalcsövön, vaselinolajat öntöttem; e két golyó távolsága 2 mm, a másik, ugyanily nagyságú, két golyót pedig az induktorral — 50 cm nagyságú — kötöttem össze; e golyók a vaselinos golyóktól 20 mm távolságban állottak ugyanabban az üvegcsőben. Hosszabb hullámokat — 280 cm és 562 cm — a Hertz-féle ismert módszer alapján nyertem, azzal a módosítással, hogy a kisütő rézdrótok végein nem voltak nagy kapaczitású gömbök.

Az elnyelés tanulmányozásakor e kisütők a koherert tartó fémedény függőleges csöve felett 20 cm távolságban vízszintesen voltak felfüggesztve. A tiszta vízzel megtöltött üvegedényt a hullámkeltő kisütő alatt a függőleges fémcsőre helyeztem; a hullám ezen keresztül juthatott a kohererhez, más hullám pedig nem érhette a koherert.

Az első kisérletet kis hullámokkal tettem. A víz felett keltett és a vizen áthatolt hullám — a víz vastagsága 1 mm — a tűt kitérítette ugyan, de e kitérés sokkal kisebb volt, mint víz nélkül; a hullám tehát tényleg meggyengült; de ezt a reflexió egyedül is előidézhette.

Ujabb kisérleti adattal kellett az elnyelést kimutatnom. E végből az üvegedényt 1·3 mm vastagságú vízréteggel töltöttem, és ezen át bocsátottam az ugyanoly hosszúságú elektromos hullámot; a tű megint kitért, de kitérése tetemesen kisebb volt, mint 1 mm vastagságú vízrétegnél; fokozatosan nagyobbítottam ezután a vízréteg vastagságát, s azt találtam, hogy minél magasabb volt az edényben a vízréteg, a tű kitérése annál kisebb lett; már 3 mm vastagságú vízrétegnél a tű meg sem mozdult, mintha csak fémfedővel lett volna a koherer nyilása befödve. E kisérleti adatok pedig az elnyelést bizonyítják.

Ha a víz hőmérsékletét emeltem, a tű kitérése nagyobbodott, a víz elnyelőképessége a hőmérséklet emelésével kisebbedett. A levegőn át a kitérés 240 mm; ha a vízréteg vastagsága $z=0{\cdot}1$ cm, a tű kitérése 150 mm; ha $z=0{\cdot}15$ cm, a kitérés 18 mm; ha $z=0{\cdot}2$ cm, a kitérés 4 mm.

Ezek után hosszabb hullámokkal tettem kisérletet. S arról győződtem meg, hogy minden hullámhosszúságnál van elnyelés, de ez az elnyelés annál kisebb, minél hosszabb a használt hullám. Végre 562 cm hosszúságú hullámmal tettem kisérletet, olyannal, a minőnek még felével sem tettek kisérletet, annál kevésbbé sikerült ekkoránál kimutatni a tiszta víz elnyelő képességét. Már 0·1 cm vastagságú vízréteg is mutat hullámgyengülést, elnyelést; az igaz, hogy az előbb nyert adatokhoz képest a kitérés sokkal nagyobb, az elnyelés kisebb; mert e vastagságú vízrétegnél a galvanometer tűjének a kitérése 224 mm, a levegőn ismét 240 mm; de már 0·15 cm vastagságú vízrétegnél e kitérés 117 mm, 0·2 cm vastagság mellett 65 mm; 0·3 cm vastagságnál 21, 0·4 cm-nél 4 mm; 0·5 cm vastag vízrétegnél alig 1 mm.

E kisérletek tehát igazolják a tisztavíz elnyelő képességét; mutatják, hogy az elnyelés kisebbedik a hullám hosszúságának a növekedésével, hogy tehát a víz elnyelőképessége anomális; azaz sokkal nagyobb, mint a mekkora állandó áramnál vezetőképességének megfelelne.

Károly Irén.

A VÉGES CSOPORTOK ELMÉLETÉNEK ÚJABB IRODALMÁBÓL.

(Második közlemény.)

II. A csoport elemeiről.

Minden elemnek van rendje és ez — mint tudjuk — n osztója. Könnyű meghatározni valamely elem hatványainak rendjét.

Legyen H rendje m és t, m legnagyobb közös osztója:

$$(t, m) = d,$$

akkor H^t-nek rendje $\frac{m}{d}$.

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy a

$$H^s = E$$

egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha s m-nek többszöröse.

Ha ugyanis

$$s = mq + r \quad {\scriptstyle (r<m)}$$

akkor a

$$H^s = (H^m)^q \,.\, H^r = H^r = E$$

egyenlőségből és a H rendjének definicziójából tüstént következik, hogy $r = 0$, tehát $s = mq$, azaz q-nak többszöröse.

Legyen most már H^t rendje μ, akkor a

$$(H^t)^\mu = H^{t\mu} = E$$

egyenletből következik, hogy $t\mu$ osztható m-mel, tehát

$$\frac{t\mu}{m} = e,$$

a hol e egész szám. Ha most már

$$t=(t,m)\,t' \quad \text{és} \quad m=(t,m)\,m',$$

a megelőző egyenlőség így is irható

$$\frac{t'\mu}{m'}=e,$$

de minthogy t' és m' relativ törzsszámok, kell hogy μ m'-vel osztható legyen, tehát ily alakú legyen

$$m'f;$$

az ily alakú számok között a legkisebb adja a keresett rendszámot μ-t, tehát

$$\mu=m'=\frac{m}{(t,m)}=\frac{m}{d}.$$

I. *Ha H rendszáma ab és*

$$(a,b)=1,$$

akkor ez az elem egy és csak egyféle módon bontható fel két egymással kommutativ elem szorzatára, a melyeknek rendjei a, illetőleg b.

Feltevésünk szerint a és b relativ törzsszámok, tehát találhatók oly x, y egész számok, a melyekre nézve

$$bx-ay=1$$

és így

$$H=H^{bx}H^{-ay}.$$

Legyen

$$H^{bx}=A, \quad H^{-ay}=B,$$

akkor A rendje a, B rendje b, ugyanis

$$(ab,bx)=(b,bx)=b$$

és

$$(ab,ay)=(a,ay)=a,$$

továbbá A, B kommutativok, mert ugyanannak az elemnek, H-nak, hatványai és végül:

$$H=AB.$$

Ha fordítva

$$H=AB$$

és A, B kommutativek, továbbá A, B rendjei a, ill. b, akkor ezek egyértelmüleg vannak meghatározva, mert

$$H^{bx}=B^{bx}A^{bx}=A^{1-ay}=A\,(A^a)^{-y}=A$$
$$H^{-ay}=A^{-ay}B^{-ay}=B^{1+bx}=B\,(B^b)^x=B,$$

tehát A is és B is mint egy ugyanannak a $H=AB$ elemnek hatványai állíthatók elő, a mivel a tétel be van bizonyítva. Két elem kommutativ voltának feltétele a következő. Kell, hogy :

$$AB=BA \tag{1}$$

legyen. E feltételt, ha behozzuk a negativ kitevőjű hatványokat, következőképen fogalmazható :

$$B^{-1}AB=A \tag{2}$$

vagy

$$A^{-1}BA=B. \tag{3}$$

A feltétel emez alakjában szereplő

$$B^{-1}AB \tag{4}$$

kifejezést, mint bizonyos az A-n végrehajtandó operáczió eredményét külön ki akarjuk emelni és 4)-ről azt fogjuk mondani, hogy ez az A elem *transzformáltja* B által. S így a következő tételt nyerjük :

II. *Két elem akkor és csak akkor kommutativ, ha mindegyikök változatlan marad a másikkal való transzformáczió után.**

III. *Egy és ugyanazon H elemmel kommutativ elemek csoportot alkotnak.* (E csoport jele legyen $\mathfrak{H}_H$.)

Az I. szerint csak azt kell kimutatni, hogy ha A, B kommutativek H-hoz, akkor szorzatuk AB is kommutativ.

---

* Még meg akarjuk említeni azt az egyszerű tételt, hogy valamely elem rendje transzformáczió után nem változik. Ha ugyanis $A^n=E$, akkor $(T^{-1}AT)^n=E$ és fordítva.

Tehát

$$A^{-1}HA = H$$
$$B^{-1}HB = H$$

és így

$$(AB)^{-1}H(AB) =$$
$$= (B^{-1}A^{-1})\,H(AB) = B^{-1}\,(A^{-1}HA)\,B = H,$$

a mivel a tétel ki van mutatva.*

A $\mathfrak{H}_H$ alcsoport indexére nézve is vonhatunk következtetést a következő meggondolásokkal. Nevezzük a csoport amaz elemeit, melyek valamely adott elemből transzformáczió útján keletkeznek, ez elem *konjugáltjainak*. Megjegyzendő, hogy a transzformáczió csoportbeli elemekkel történjék.

A konjugált elemek definiczíójából világosak a következő tételek:

IV*a) Ha A konjugált B-vel, akkor fordítva B is konjugált A-val.*

Ugyanis az

$$A = T^{-1}BT$$

egyenletből következik

$$B = TAT^{-1}.$$

IV*b) Egy ugyanazon elemmel konjugált elemek egymás között is konjugáltak.*

Ha ugyanis A és B mindketten P-vel konjugáltak, akkor

$$A = T^{-1}PT$$
$$B = U^{-1}PU$$

és ebből

$$P = TAT^{-1} = UBU^{-1}$$

vagyis

$$A = T^{-1}\,(UBU^{-1})\,T = (U^{-1}T)^{-1}B\,(U^{-1}T),$$

---

* Az efajta számításoknál gyakran szerepel a következő identitás

$$(A_1A_2\ldots A_i)^{-1} = A_i^{-1}A_{i-1}^{-1}\ldots A_1^{-1}.$$

Ugyanis a szorzat associativ jellegéből tüstént következik, hogy az

$$X(A_1A_2\ldots A_i) = E$$

egyenletnek megoldása (az I. szerint csak egy ilyen van):

$$X = A_i^{-1}A_{i-1}^{-1}\ldots A_1^{-1}.$$

hasonlókép

$$B = U^{-1}(TAT^{-1})\,U = (T^{-1}U)^{-1}A\,(T^{-1}U).$$

V. *A főelem csak önönmagával konjugált.*

Ugyanis

$$T^{-1}ET = E.$$

Most már a következő tételt állíthatjuk fel.

VI. *A $\mathfrak{H}_H$ alcsoport indexe megegyezik a H-val konjugált elemek számával.*

Ugyanis az előbbi szakasz szerint

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_H R_0 + \mathfrak{H}_H R_1 + \cdots + \mathfrak{H}_H R_{j-1},$$

a hol

$$R_i \ (\text{mod. } \mathfrak{H}_H) \quad (i=0,1,2,\ldots)$$

az inkongruens osztályok képviselői, vagyis az

$$R_i R_k^{-1} \quad (i, k=0,1,2,\ldots)$$

szorzatok egyike sem eleme $\mathfrak{H}_H$-nak. Ha már most $\overline{H}$ valamely tetszőleges eleme $\mathfrak{H}_H$-nak, akkor

$$(\overline{H}R_l)^{-1}\overline{H}(\overline{H}R_l) =$$

$$= R_l^{-1}(\overline{H}^{-1}H\overline{H})\,R_l = R_l^{-1}HR_l.$$

És így H-nak összes konjugált elemeit megkapjuk, ha l helyébe összes értékeit teszszük. De másfelől így csupa különböző elemet kapunk, hiszen az

$$R_l^{-1}HR_l = R_m^{-1}HR_m$$

egyenlőségből következnék

$$(R_l R_m^{-1})^{-1}H(R_l R_m^{-1}) = H$$

vagyis

$$R_l R_m^{-1}$$

$\mathfrak{H}_H$-nak eleme lenne, a mi ki van zárva. Igy tehát a szóban forgó j index csakugyan megegyezik a H-val konjugált elemek számával. A $\overline{H}$ elemhez tartozó $\mathfrak{H}_H$ csoport az előbbi szakasz szerint H összes hatványait tartalmazza. Szélső eset az, midőn ezeken kívül más elemet nem is tartalmaz.

A másik szélső eset, a midőn $\mathfrak{H}_H$ összeesik a $\mathfrak{H}$ csoporttal. A H ekkor a csoportnak *invariáns* eleme, minden transzformácziónál változatlanul marad.

VII. *A főelem a csoportnak invariáns eleme.*

VIII. *Minden törzsszámhatványrendű csoportnak vannak a főelemtől különböző invariáns elemei.* (SYLOW.)

Ugyanis a csoport elemeit következőképen sorozhatjuk osztályokba. Tartozzanak egy osztályba az egymás között konjugált elemek. Igy tehát az összes invariáns elemek, közöttük a főelem, önönmaguk alkotnak osztályokat. Ha valamely elem nem invariáns, akkor az ő osztályába tartozó elemek száma n-nek osztója, a mint az előző tételekből következik. Jelen esetben n törzsszámhatvány

$$n=p^{\lambda}.$$

Minden elem egy és csak egy osztályban fordul elő; ha tehát felteszszük, hogy csoportunknak az egységtől különböző invariáns eleme nincs, a következő számbeli relácziót kapjuk:

$$p^{\lambda}=1+\sum_i p^{\gamma_i}$$

$$\gamma_i>0.$$

Ebből

$$p^{\lambda}\equiv 1 \; (\mathrm{mod.}\, p)$$

következnék, a mi lehetetlen, ha

$$\lambda>0.$$

IX. *Invariáns elem hatványai is invariáns elemek.*

Ha ugyanis I invariáns elem, akkor:

$$S^{-1}I^tS=(S^{-1}IS)(S^{-1}IS)\ldots=I^t.$$

Ebből még a következő tétel folyik.

X. *Minden p^{λ}-rendű csoportban van p-ed rendű invariáns elem*

Ha ugyanis I maga p^{γ}-ad rendű volna, akkor $I^{p^{\gamma-1}}$ p-ed rendű elem.

III. A csoport alcsoportjairól.

Legyen $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{H}$ csoportnak alcsoportja. Valamely H elemről akkor és csak akkor mondjuk, hogy $\mathfrak{G}$-vel kommutativ, ha $\mathfrak{G}$ elemei a H-val transzformálva ismét $\mathfrak{G}$-beli elemeket adnak. Röviden ezt így írjuk:

$$H^{-1}\mathfrak{G}H = \mathfrak{G}.$$

I. *A $\mathfrak{G}$-hez kommutativ elemek csoportot alkotnak.*

Ha ugyanis

$$H_i^{-1}\mathfrak{G}H_i = \mathfrak{G}$$

$$H_k^{-1}\mathfrak{G}H_k = \mathfrak{G}$$

akkor

$$(H_iH_k)^{-1}\,\mathfrak{G}\,(H_iH_k) = H_k^{-1}\,(H_i^{-1}\mathfrak{G}H_i)\,H_k = \mathfrak{G}.$$

Az I) *alatti csoport rövid jele legyen:* $\mathfrak{G}'$.

A $\mathfrak{G}$ alcsoport transzformáltjait nevezzük a $\mathfrak{G}$-hez *konjugált* csoportoknak. Konjugált csoportok rendje ugyanaz. A definiczióból a következő tételek folynak, a melyeknek bebizonyítása úgy történik, mint az előző szakaszban a konjugált elemekre vonatkozó tételek.

II*a) Ha $\mathfrak{G}_1$ alcsoport konjugált $\mathfrak{G}_2$-vel, akkor $\mathfrak{G}_2$ is konjugált $\mathfrak{G}_1$-vel.*

II*b) Valamely alcsoporthoz konjugált csoportok egymásközt is konjugáltak.*

III. *A $\mathfrak{G}'$ alcsoport indexe megegyezik a $\mathfrak{G}$-hez konjugált csoportok számával.*

A csoport definicziójából folyik, hogy $\mathfrak{G}'$ tartalmazza $\mathfrak{G}$-t, szélső eset lesz az, midőn

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}.$$

A másik szélső eset, midőn

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{H}.$$

Ekkor a $\mathfrak{G}$ alcsoportot *invariáns* alcsoportnak nevezzük. Az invariáns alcsoportnak eme definicziója teljesen egyértékű a következővel.

IV. *A* $\mathfrak{G}$ *alcsoport akkor és csak akkor invariáns, ha a* $\mathfrak{H}$ *csoport tetszőleges H elemére nézve.*

$$\mathfrak{G}H = H\mathfrak{G}.$$

Az invariáns alcsoport fogalma módot nyujt a csoportoknak oly osztályozására, mely különösen az algebrai alkalmazások szempontjából fontos. Valamely csoportot *egyszerűnek* nevezünk, ha a főelem által képviselt csoporton kivül nincs invariáns alcsoportja, míg ellenkező esetben a csoport *összetett.*

V. *Ha a* (mod. $\mathfrak{G}$) *kongruens elemekből álló osztályokat mint elemeket fogjuk fel, akkor ezen osztályok csoportot alkotnak, feltéve; hogy* $\mathfrak{G}$ *invariáns alcsoport.*

Megjegyzendő, hogy jelen esetben az I. szakaszban megkülönböztetett I. és II. fajú kongruenczia tökéletesen összeesik, mert hisz tetszőleges H elemre vonatkozólag

$$\mathfrak{G}H = H\mathfrak{G}.$$

Legyen tehát

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}R_0 + \mathfrak{G}R_1 + \cdots + \mathfrak{G}R_{j-1},$$

a hol R_i a (mod. $\mathfrak{G}$) inkongruens osztályok képviselői és

$$R_0 = E.$$

Ki kell számítanunk a

$$(\mathfrak{G}R_i)(\mathfrak{G}R_k)$$

szorzatot. A $\mathfrak{G}$ invariáns alcsoport lévén,

$$(\mathfrak{G}R_i)(\mathfrak{G}R_k) = \mathfrak{G}(R_i\mathfrak{G})R_k = \mathfrak{G}(\mathfrak{G}R_i)R_k = (\mathfrak{G}\mathfrak{G})(R_iR_k)$$

azonban a csoport fogalmánál fogva

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$$

hiszen ha S valamely tetszőleges eleme $\mathfrak{G}$-nek, akkor

$$\mathfrak{G}S = \mathfrak{G}$$

és így

$$(\mathfrak{G}R_i)(\mathfrak{G}R_k) = \mathfrak{G}R_iR_k,$$

de a $\mathfrak{G}$-nek van oly G eleme, melyre

$$R_iR_k = GR_l$$

és így végül:

$$(\mathfrak{G}R_i)(\mathfrak{G}R_k)=\mathfrak{G}R_l,$$

a mivel tételünk be van bizonyítva. Egyszersmind azt is látni, hogy az így megállapított csoportnak főeleme:

$$\mathfrak{G}R_0=\mathfrak{G}E.$$

VI. *Az előbb definiált csoportot alkotásánál fogva osztálycsoportnak nevezzük. Rövid jele* $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, *és ha* $\mathfrak{G}$ *rendje m, akkor ennek rendje egyenlő az* $\frac{n}{m}$ *hányadossal. Ez utóbbi tulajdonsága miatt az osztálycsoportot összetételi csoportnak is nevezik.*

Az osztálycsoport rendszámára vonatkozó állítás az előbbi bizonyításból látható. A most levezetett fogalom kiváló jelentőségét mutatják a következő tételek.

VII. *Ha a* $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ *osztálycsoportnak van oly* $\mathfrak{A}$ *alcsoportja, a melynek rendje i, akkor a* $\mathfrak{H}$ *csoportnak van oly a* $\mathfrak{G}$*-t tartalmazó* $\mathfrak{B}$ *alcsoportja, melyre a* $\mathfrak{G}$ *indexe i.*

Ismét

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{G}R_0+\mathfrak{G}R_1+\cdots+\mathfrak{G}R_{j-1}.$$

Feltevésünk szerint a

$$\mathfrak{G}R_0,\ \mathfrak{G}R_1,\ldots,\ \mathfrak{G}R_{i-1}$$

osztályok bizonyos $\mathfrak{A}$ csoportot alkotnak, melynek rendje i.

De ekkor az osztályoktól az elemekhez visszatérve

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{G}R_0+\mathfrak{G}R_1+\cdots+\mathfrak{G}R_{i-1}$$

szintén csoport, hiszen

$$(\mathfrak{G}R_k)(\mathfrak{G}R_l)=\mathfrak{G}R_m$$
$$\left(\substack{k,\ l=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ i-1\\ m<i}\right)$$

és ebből látni, hogy a $\mathfrak{B}$ rendszerből két elemet választván, ezeknek szorzata ismét a rendszerbe tartozik, a mivel a tétel be van bizonyítva. A kiírt alakokból egyszersmind világos a következő tétel.

VII*b*) *Ha* $\mathfrak{A}$ $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$*-nek invariáns alcsoportja, akkor* $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{H}$*-nak invariáns alcsoportja.*

Ugyanis

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{G}R) = (\mathfrak{G}R)\mathfrak{A}$$

vagy máskép írva

$$(\mathfrak{G}R_k)(\mathfrak{G}R) = (\mathfrak{G}R)(\mathfrak{G}R_l),$$

$$\binom{k=0,1,2,\ldots,i-1}{0 \leqq l \leqq i-1}$$

tehát már többször alkalmazott összevonás után

$$(\mathfrak{G}R_k)R = R(\mathfrak{G}R_l),$$

a miből

$$\mathfrak{B}R = R\mathfrak{B}.$$

VIII. *Ha* $\mathfrak{G}$ *invariáns alcsoport és* $\mathfrak{B}$ *valamely a* $\mathfrak{G}$*-t tartalmazó alcsoport, akkor* $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{G}}$ *alcsoportja* $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$*-nek. A* $\mathfrak{G}$*-nek* $\mathfrak{B}$*-re vonatkozó indexe megegyezik* $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{G}}$*-nek* $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$*-re vonatkozó indexével.*

Először is

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}R_0 + \mathfrak{G}R_1 + \cdots + \mathfrak{G}R_{j-1}$$

a $\mathfrak{B}$ csoport definicziójából és az I. §. tárgyalásaiból világos, hogy a

$$\mathfrak{G}R_k$$

rendszernek vagy egy eleme sem tartozik $\mathfrak{B}$-be, vagy pedig mind, tehát

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{G}R_0 + \mathfrak{G}R_1 + \cdots + \mathfrak{G}R_{i+1},$$

de $\mathfrak{G}$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{H}$-nak és így $\mathfrak{B}$-nek is, tehát létezik a $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{G}}$ osztálycsoport, vagyis a

$$\mathfrak{G}R_0,\ \mathfrak{G}R_1,\ \ldots,\ \mathfrak{G}R_{i-1}$$

rendszerek alkotta csoport. E csoport természetesen $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$-nek alcsoportja, mert elemeinek egy részéből áll. Egyszersmind érvényes a következő tétel.

VIII*b) Ha* $\mathfrak{B}$ *invariáns alcsoportja* $\mathfrak{H}$*-nak, akkor* $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{G}}$ *is invariáns alcsoportja* $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$*-nek.*

Ugyanis

$$\mathfrak{B}R = R\mathfrak{B},$$

a miből

$$(\mathfrak{G}R_k)R = R(\mathfrak{G}R_l)$$
$$\binom{k=0,1,2,\ldots,i-1}{0 \leqq l \leqq i-1}$$

azonban

$$\mathfrak{G}R_k = \mathfrak{G}\mathfrak{G}R_k = \mathfrak{G}R_k\mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{G}R_l = \mathfrak{G}\mathfrak{G}R_l,$$

továbbá

$$R\mathfrak{G} = \mathfrak{G}R$$

és így

$$(\mathfrak{G}R_k)(\mathfrak{G}R) = (\mathfrak{G}R)(\mathfrak{G}R_l).$$

Az előbbi tételekből messzemenő következtetések vonhatók. A levezetésekben mindig a teljes indukczió szerepel, s éppen ezért fog az osztálycsoport, melynek rendje az eredeti csoporténál kisebb, fontossággal birni.

IX. *Minden p^λ-ad rendű csoportnak vannak $p^{\lambda-i}$ ($i=0, 1, \ldots, \lambda$) rendű alcsoportjai.*

Hogy a bebizonyítás áttekinthető legyen, az előbbi tételeket még a következő alakban akarjuk fogalmazni:

Ha $\mathfrak{G}$ invariáns alcsoport, akkor $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$-nek minden alcsoportja $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{G}}$ alakban írható, a hol $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{H}$-nak alcsoportja. (Az $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{G}}$ rendje $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{G}$ rendjeinek hányadosa.) *Ha pedig $\mathfrak{A}$ valamely a $\mathfrak{G}$-t tartalmazó alcsoportja $\mathfrak{H}$-nak, akkor $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{G}}$ alcsoportja $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$-nek. Ha $\mathfrak{A}$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{H}$-nak, akkor $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{G}}$ invariáns alcsoportja $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$-nek és fordítva.*

A bebizonyítandó tétel már most $\lambda=1$ esetben triviális.

Tegyük fel, hogy a tétel már a $p^{\lambda-1}$-ed rendű csoportokra be van bizonyítva. A $\mathfrak{H}$ csoportnak mindenesetre van p-ed rendű invariáns eleme, ennek hatványai egy p-ed rendű invariáns alcsoportot adnak, jelöljük ezt $\mathfrak{P}$-vel. Ekkor létezik a

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{P}}, \ p^{\lambda-1}\text{-ed rendű}$$

osztálycsoport. Ennek van oly $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}}$ alcsoportja, melynek rendje $p^{\lambda-1-i}$ és így $\mathfrak{A}$ rendje: $p^{\lambda-i}$, a mivel a tétel be van bizonyítva. Ehhez hasonló módon bizonyítható be a következő tétel.

IX*b) Minden p^λ-ad rendű csoportnak vannak $p^{\lambda-i}$ ($i=0,1,\ldots,2$) rendű invariáns alcsoportjai.*

X. *Valamely p^λ-ad rendű csoportnak minden invariáns alcsoportja tartalmaz a csoportból a főelemtől különböző invariáns elemeket.*

Sorozzuk az egymás között konjugált elemeket egy-egy osztályba. Akkor minden invariáns alcsoport vagy az összes elemeket tartalmazza egy osztályból, vagy egyet sem.

Legyen az invariáns alcsoport rendje $p^{\lambda-i}$, ha felteszszük, hogy a csoportból a főelemen kívül invariáns elemet nem tartalmaz, lenne mint a II. §. VIII. tételben

$$p^{\lambda-i} \equiv 1 \, (\mathrm{mod.}\, p)$$
$$i < \lambda,$$

a mi abszurdum.

XI. *Valamely p^λ-ed rendű csoportnak minden $p^{\lambda-1}$-ed rendű alcsoportja invariáns alcsoport.*

Legyen $\mathfrak{G}$ egy $p^{\lambda-1}$-ed rendű alcsoport. Vagy nem tartalmaz ez az alcsoport a $\mathfrak{H}$-ból invariáns elemeket, vagy tartalmaz. Legyen az első esetben $\mathfrak{H}$-nak P valamely p-edrendű invariáns eleme.

Akkor

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}P + \mathfrak{G}P^2 + \cdots + \mathfrak{G}P^p,$$

a miből világos, hogy $\mathfrak{G}$ invariáns alcsoport, hiszen bármely invariáns elem a csoport összes elemeivel kommutativ és így lesz:

$$P^{-\alpha}\mathfrak{G}P^\alpha = \mathfrak{G}.$$

A második esetben teljes indukcziót fogunk alkalmazni.

A $\lambda=1$ esetre a tétel triviális. $\mathfrak{G}$ tartalmaz $\mathfrak{H}$-ból invariáns elemet. Legyen pl. ilyen P. Ennek hatványai invariáns alcsoportot alkotnak, melyet $\mathfrak{P}$-vel jelöljünk. Ekkor létezik a

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{P}} \; p^{\lambda-1}\text{-ed rendű}$$

osztálycsoport. Ennek a $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$ $p^{\lambda-2}$-ed rendű s így invariáns alcsoportja, a minek következtében $\mathfrak{G}$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{H}$-nak.

Megjegyzés. A bebizonyításban felvett első eset, a mint azt az előbbi tételből látjuk, valóban nem következhetik be.

XII. *Ha* $\mathfrak{G}$ *valamely* p^λ*-ed rendű csoportnak alcsoportja, akkor* $\mathfrak{G}'$ *mindig valóban tartalmazza* $\mathfrak{G}$*-t.*

Ha először is $\mathfrak{G}$ nem tartalmaz $\mathfrak{H}$-ból invariáns elemet és P invariáns elem, úgy $\mathfrak{G}'$ mindenesetre tartalmazza P-t és így

$$\mathfrak{G}' > \mathfrak{G}.$$

Tegyük fel másodszor, hogy $\mathfrak{G}$ tartalmaz $\mathfrak{H}$-ból invariáns elemet pl. P-t, melynek hatványai alkotják a $\mathfrak{P}$ csoportot.

Áttérve a $\mathfrak{H}$-tól a $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{P}}$ osztálycsoportra, ugyanoly módon alkalmazható a teljes indukczió. Ugyanis van oly $\overline{\mathfrak{G}}$ csoport, mely $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$-t mint valódi invariáns alcsoportot tartalmazza és így $\overline{\mathfrak{G}}$, mint valódi invariáns alcsoportot tartalmazza $\mathfrak{G}$-t, tehát

$$\mathfrak{G}' > \mathfrak{G}.$$

Ennek a tételnek egy következményét még külön akarjuk fogalmazni.

XIII. *Ha* $\mathfrak{G}$ *valamely* p^λ*-ad rendű csoportnak* p^α*-ad rendű alcsoportja, akkor van oly* $p^{\alpha+1}$*-ed rendű alcsoport, melynek* $\mathfrak{G}$ *invariáns alcsoportja.*

Ha $\alpha = \lambda - 1$, akkor állításunk összeesik a XI. tétellel. Általában pedig szerkeszszük meg $\mathfrak{G}'$-t, melynek rendje legyen p^β, a hol

$$\beta > \alpha.$$

A $\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}}$ osztálycsoport rendje $p^{\beta-\alpha}$. Ennek IX. szerint van p-ed rendű alcsoportja, ennek az alcsoportnak oly a $\mathfrak{G}$-t tartalmazó $p^{\alpha+1}$-ed rendű csoport felel meg, mely másfelől $\mathfrak{G}'$-nek alcsoportja. Jelöljük e csoportot átmenetileg $\overline{\mathfrak{G}}$-vel. Azonban $\mathfrak{G}$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{G}'$-nek és $\overline{\mathfrak{G}}$-nak is, a mivel a tétel be van bizonyítva.

A IX. tétel nagy mértékben általánosítható. A levezetésben azonban e tételt fel sem kell használnunk, hanem teljes indukcziót alkalmazunk. A tétel az ú. n. Sylow-féle * első tétel. Absztrakt módon először Frobenius vezette le.

* Math. Annalen V. k.

XIV. *Ha valamely csoport rendje n osztható p^x-vel, akkor a csoportnak van p^x-ed rendű alcsoportja. A p törzsszámot jelent.*

A tétel az

$$n=1,\ 2,\ 3$$

esetekre helyes. Másodrendű csoport a főelemen kívül egy másodrendű elemet, harmadrendű csoport a főelemen kívül két harmadrendű elemet tartalmaz. A tételt tehát bebizonyitottnak vehetjük egy bizonyos n számnál kisebb rendű csoportokra. Hogy a bizonyítás áttekinthető legyen, előre bocsátunk egy segédtételt oly csoportokról, melyeknek minden eleme a csoport összes elemeivel *kommutativ.*

Ilyen csoportokat: *kommutativ* (vagy ABEL-féle) *csoportoknak* nevezünk.

Segédtétel. Ha valamely kommutativ csoport rendje n osztható p-vel, akkor a csoportnak van p-ed rendű eleme.

Legyen

$$n=p^z m.$$

A csoportnak mindenesetre van törzsszámrendű eleme, hiszen egy tetszőleges elem alkalmasan megválasztott hatványa törzsszámrendű. Legyen Q valamely q-ad rendű elem ($q \gtrless p$) és hatványai képezzék a $\mathfrak{Q}$ csoportot.

Mivel kommutativ csoport minden eleme invariáns elem, minden alcsoportja invariáns alcsoport; $\mathfrak{Q}$ is invariáns alcsoport, vagyis létezik a

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{Q}},\quad p^z\frac{m}{q}\text{-ad rendű}$$

osztálycsoport. Ha

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{Q}R_0+\mathfrak{Q}R_1+\cdots$$

akkor $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{Q}}$ elemei a

$$\mathfrak{Q}R_0,\ \mathfrak{Q}R_1,\ \ldots$$

rendszerek. Az osztálycsoport is kommutativ, rendje $\mathfrak{H}$-énál kisebb, tehát reá vonatkozólag a segédtételt bebizonyitottnak vehetjük és így van p-ed rendű eleme. Legyen $\mathfrak{Q}R_i$ ilyen, vagyis p a legkisebb kitevő, melyre

$$(\mathfrak{Q}R_i)^p=\mathfrak{Q}R_0=\mathfrak{Q}.$$

Azonban most minden szorzásnál érvényes a kommutativ elv, tehát

$$(\mathfrak{Q}R_i)^p = \mathfrak{Q}^p R_i^p = \mathfrak{Q} R_i^p = \mathfrak{Q}$$

és így R_i^p eleme a $\mathfrak{Q}$ csoportnak, a míg R_i nem az. Azonban $\mathfrak{Q}$ elemei a főelem kivételével q-ad rendűek és így

$$(R_i^p)^q = R_i^{pq} = E.$$

Határozzuk meg most már az R_i elem rendjét. Mivel R_i nem főelem, ez csak p, q vagy pq lehet. Ha az első eset áll be, a segédtétel már is be van bizonyítva. Ha a harmadik eset igaz, akkor R_i^q elem rendje p és ismét be van a bizonyítás fejezve. A második esetben volna

$$R_i = (R_i^p)^z,$$

ha csak z-t úgy választjuk, hogy

$$pz \equiv 1 \,(\text{mod.}\, q)$$

legyen. De ekkor R_i eleme volna a $\mathfrak{Q}$ alcsoportnak, a mi azonban nem igaz. Igy ezen eset be sem következhetik és a segédtétel be van bizonyítva.

Rendezzük már most az adott csoportnak egymás között konjugált elemeit egy-egy osztályba. Minden elem egy és csak egy osztályba tartozik. Az invariáns elemek mindegyike külön osztályt alkot. Ha az invariáns osztályok számát s-sel jelöljük és az α-dik nem invariáns osztály elemeinek számát n_α-val, akkor az n következő számbeli szétbontását kapjuk:

$$n = s + n_1 + n_2 + \cdots \qquad \text{I)}$$

Megjegyezzük még, hogy

$$n = p^z m. \quad z \geqq a$$
$$(p, m) = 1.$$

Az I) alatti reláczió feltünteti, hogy a csoportnak s-számú invariáns eleme van. Ezek, mint a definiczióból világos, *alcsoportot*, még pedig *kommutativ* alcsoportot alkotnak.

Már most két esetet fogunk megkülönböztetni.

$$s \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, p). \tag{1}$$

Ekkor a segédtétel szerint az invariáns elemek között van p-ed rendű. Legyen P ilyen, ennek hatványai invariáns alcsoportot adnak : $\mathfrak{P}$. S így létezik a

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{P}}, \; p^{z-1}m\text{-ed rendű}$$

osztálycsoport. Ennek rendje kisebb, n-nél, tehát van p^{x-1}-ed rendű alcsoportja. Legyen $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$ ilyen alcsoport, ekkor $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{H}$-nak p^x-ed rendű alcsoportja. A második esetben

$$(s, p) = 1. \tag{2}$$

Ekkor az I)-ből világos, hogy létezik oly a index, melyre vonatkozólag

$$(n_a, p) = 1.$$

Legyen n_a a H elemmel konjugált elemek száma. Mint az előzőkből tudjuk, ez megegyezik a $\mathfrak{H}_H$ alcsoport indexével.

A H nem lévén invariáns elem, $\mathfrak{H}_H$ rendje kisebb n-nél, azonkívül az éppen említettek alapján $\mathfrak{H}_H$ rendje a következő alakú:

$$p^z m', \; m' < m.$$

Ennélfogva $\mathfrak{H}_H$-nak van p^x-ed rendű alcsoportja. Ez egyszersmind $\mathfrak{H}$-nak is alcsoportja.

Bauer Mihály.

A TESTEK HALMAZÁLLAPOTAIRÓL.

(Ötödik közlemény.)

26. §. *A testek mágneses tulajdonságai.*

Az ide vonatkozó kutatások legnagyobb része a *mágneses momentum*nak (mágneses intenzitás × mágnes hosszúsága) a hőmérséklettel való változását kutatja *a szilárd testeknél.* Az általános eredmény az, hogy a mágneses momentum a hőmérséklettel együtt egy bizonyos határig nő, de van minden testre olyan hőmérséklet, melyen felül a momentum a hőmérséklet emelkedésekor csökken. Ezen hőfokot ad analogiam *kritikus hőfok*nak nevezték el, mely pl.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{vasnál} & 700\text{—}800^\circ \\ \text{aczélnál} & 600\text{—}700^\circ \end{array}\right\} \text{nikkelnél kb. } 300^\circ.$$

A mágneses momentum változása a mágneses erő nagyságától is függ; kis mágneses erő esetében nő a hőmérséklettel a vörös izzásig, azután hirtelen zérusra esik; ha a mágnesező erő nagy, akkor a momentum lassan csökken a hőmérséklet növekedésekor s vörös izzásnál szintén igen kis értékre sülyed.[1] A mágneses kritikus hőmérséklet alatt tehát a momentum a hőmérséklettel együtt növekszik; direkt vizsgálatokkal kutatták, valjon ez az összefüggés a hőmérséklet csökkenésekor és pedig különösen igen alacsony hőmérsékleteknél is fennáll-e? Egyes kisebb terjedelmű kutatások igenlőleg válaszoltak a kérdésre. PICTET szerint a mágneses intenzitás, a testet $+30^\circ$-ról -105°-ra hűtve, körülbelül 33%-al nő;[2]

[1] BAUR, Wied. Ann. XI, pag. 394; 1880.

[2] Beibl. XIX, pag. 660; 1895.

Fleming szerint pedig, ha a mágnest hirtelen folyékony levegőbe mártjuk, elveszti mágnességét, de az első rázkódás után mágnessége nagyobb lesz, mint előbb volt.* Kiterjedt kutatásokkal Dewar vizsgálta meg a kérdést.** Kis, legfölebb 25 mm hosszú, drótalakú mágneseket egy magnetometer közelében folyékony levegővel itatott gyapjúszivacs által lehűtött; az első lehűtés után a mágnes a rendes hőmérsékletre emeltetett; a processust azután többször ismételte. A következő táblázat a mágneses momentum különbségeit tünteti föl —182° C. és +15° C. hőmérsékleten, a 15° C. kezdeti hőmérsékleten észlelt érték %-ában.

		—182° C.	+15° C.
1. Rideg aczél 12·7 mm hosszú 10·2 « átm.	1. cziklus	0	—30
	2. «	+33	—5
	3. «	+36	0
2. Lágy aczél	1. «	+12	—28
	2. «	+51	0
	3. «	+51	0
3. Rideg aczél 26·2 mm hosszú 10·2 « átm.	1. «	—24	—43·4
	2. «	+23	0
	3. «	+23	0
4. 9 aczéldrót egy kötegben	1. «	+12·5	+3
	2. «	+38	—2
	3. «	+33	0
5. U. az 4 nap mulva	1. «	+50	0

A számok azt mutatják, hogy a melegités és lehűtés egy cziklusa a mágnest tartós állapotba hozza; ekkor a lehűtés a mágneses momentumot 30—50%-al növeli s az újra melegítés eredeti értékére viszi vissza.

*A gázok*nál Quincke kisérleteit említjük,*** a ki meghatározta, hogy a levegőnél és oxygénnél a mágnesség intenzitása a hőmérséklet emelkedésekor csökken.

* Beibl. XX, pag. 886; 1897.

** Chem. News. LXXI, pag. 199; 1895.

*** Wied. Ann. XXXIV, pag. 401; 1888.

A testeket *mágneses magatartásukra* nézve FARADAY paramágneses és diamágneses testekre osztja, a szerint, a mint elektromágnes sarkai közé helyezve axiálisan, vagy arra merőlegesen helyezkednek el. Paramágneses test a gázok közül egyedül az oxygén; folyós állapotban is paramágneses, mágnessége körülbelül 0·001-e a vas mágnességének; a folyós levegő is paramágneses, de mágnessége gyöngébb, mint az oxygéné; * a levegő gázállapotban diamágneses. Paramágneses anyagok: *Fe* és vegyületei, *Ni, Co, Mn, Cr, Ce, Ti, Pt* közönséges állapotban; diamágneses anyagok: *Bi, P, Sb, Zn, Hg, Pb, Ag, Cu, Au, Pt* tisztán, *Te, Se, S, H*, H_2O, C_2H_6O, levegő.

DEWAR megvizsgálta még az egyes gázok mágneses viselkedését más gázokban.** Táblázata:

	Levegő-ben	Szén-dioxydban	Hydroxyd-ban	Széngáz-ban
Levegő	0	+	+gyenge	+
Nitrogén	—	—	—erős	—
Oxygén	+	+	+erős	+erős
Széndioxyd	—	0	—	—gyenge
Szénoxyd	—	—	—	—gyenge
Nitrogénoxyd	—gyenge	+	+	
Aethylén	—	—	—	—
Ammoniak	—	—	—	

Úgy látszik, minden gáznak megvan a határozott mágneses viselkedése a többi gázokkal szemben.

Az előadottak legfontosabb eredményeit abban foglalhatjuk össze, hogy a mágnesi intenzitás a hőmérséklettel egyenlő értelemben változik; igen magas hőmérsékleteknél igen kicsi, igen mély hőmérsékleteknél igen nagy az intenzitás.

---

* DEWAR, Engineer LXXV, pag. 88; 1893. — M. Ph. L. II, pag. 148; 1893.
** Engineer LXXIII, pag. 516; 1892.

26. §. *A testek optikai tulajdonságai.*

A színképre és a fénytörésre fogunk kiterjeszkedni.

Izzó gázoknak és gőzöknek rendesen vonalas színképeik vannak, míg a folyékony és szilárd testek színképe folytonos. *A légnemű testek* színképe változhatik és pedig befolyással lehetnek rá a sűrűség és a hőmérséklet.

A sűrűség hatása abban nyilvánul, hogy ennek növekedésével a színkép veszít vonalas képéből s közeledik a folytonos felé. Hogy vajjon van-e folytonos átmenet a két eset között, még egy kisérlet sem vizsgálta meg; mindenesetre fontos volna ismerni e változást a halmazállapot átmeneteinél s különösen a kritikus pont körül.

Ugyanazon gáz színképének változását a hőmérséklettel Plücker és Hittorff mutatták ki.[1] Bunsen u. i. azt állapította meg,[2] hogy a hőmérsékletnek, legalább tág határok közt, nincs befolyása a színképre; az említett kutatók Geissler-csövek segélyével megvizsgálták a hőmérséklet ezen hatását s azt találták, hogy alacsonyabb hőmérsekletnél és gyönge kisütéseknél sávos színkép keletkezik, magas hőmérsékletnél és erős kisütés mellett vonalas színkép jelentkezik; a kétféle színkép között nincsen folytonos átmenet. Ha a hőmérséklet és a nyomás igen magasak, folytonos színképet kapunk.

A hőátbocsájtó képességgel analóg viselkedést találunk a fényátbocsájtóképességben; a színképekben ez, mint *abszorpcziós színkép* jelentkezik. Megemlítjük itt Dewar eredményeit, melyek szerint a folyékony oxygén abszzorpczióspektruma tisztán mutatja az *A, B* vonalakat, a folyós hydrogénnek pedig nincs abszorpcziós spektruma.[3] Dewar azt is kimutatta, hogy a testek fajlagos abszorpczió képessége a hőmérséklettel nagyon változik;[4] a —190° C. hőfokra hűtött testek színe megváltozik.

---

[1] Phil. Trans. 1865.
[2] Pogg. Ann. 1860; 1861.
[3] Beibl. XXII, pag. 515; 1898.
[4] Chem. News. LXXI, pag. 192; 1895.

A törésmutatót a gázok számára először Biot és Arago határozták meg * s bizonyos szabályszerűségeket is iparkodtak megállapitani; szerintük, ha k a gáz törésmutatója, d a sűrűsége, akkor a $\frac{k^2-1}{d}$ kifejezés állandó; továbbá: vegyületekre közelítőleg, keverékekre pontosan érvényes, hogy a törőképesség $\left(\frac{k^2-1}{d}\right)$ a részek törőképességeinek összege. Későbbi vizsgálatok kiderítették, hogy a törőképesség nem állandó s különösen a folyékony állapotba való átmenetelnél veszti el folytonosságát; a kifejezés állandósága egyik halmazállapotban sem érvényes; a vegyületekre adott összefüggés pedig teljesen érvénytelen.

A törési viszonyokra nézve egyetlen positiv ismeretünk az, hogy a törésmutató a légnemű testeknél a hőmérséklet emelkedésével s a sűrűség csökkenésével alászáll; ugyanezen körülmény jelentkezik a folyékony testeknél is; a szilárd testek törésmutatója legtöbbnél növekszik a hőmérséklettel, néhánynál csökken. A változások törvényei azonban ismeretlenek.

Galitzine a következő eszközt szerkesztette, melylyel a törésmutató változását a kritikus hőmérsékletig lehet követni.** A folyadék telített gőzével együtt hengeres üvegcsőbe van bezárva; a csövet, mint hengeres lencsét használja. A cső előtt ismeretes távolságban levő homályos üvegre vésett két parallel vonal képének távolságát figyeljük meg, miután a sugarak a gőzben, illetőleg a folyadékban megtörettek; ebből a törésmutató kiszámítható.

A következőkben még összeállitjuk néhány folyósított anyag törésmutatóját:

Folyósított levegő		n_D	$= 1{\cdot}2062$	(Dewar)
«	æthylén	n_D	$= 1{\cdot}3632$	«
«	nitrogénoxydul	n_D	$= 1{\cdot}3305$	«
«	oxygén	n_D	$= 1{\cdot}2236$	(Dewar-Liveing)
«	«	$n_{\text{kék } Cd}$	$= 1{\cdot}2249$	« «
«	«	$n_{\text{vörös } Cd}$	$= 1{\cdot}2211$	« «

* Gilb. Ann. XXV, XXVI; 1807.

** Beibl. XIX, pag. 122; 1895.

Folyósitott oxygén	n_{Th}	$= 1{\cdot}2219$	(DEWAR-LIVEING)
« «	n_{Na}	$= 1{\cdot}2314$	« «
« «	n_{Na}	$= 1{\cdot}2217$	(OLSZEWSKI-WITKOWSKI)
« «	n_{Li}	$= 1{\cdot}2213$	« «
« «	n_{Th}	$= 1{\cdot}2236$	« «

27. §. *Összefoglalás.*

Feladatunk volt a testek physikai tulajdonságainak tárgyalása oly módon, hogy lehetőleg feltüntessük azon új szempontokat, melyek a kutatásokba ANDREWS-nak a kritikus viszonyokról tett felfedezése folytán léptek be.

ANDREWS fölfedezésének hatását a következőkben foglalhatjuk össze. Egységes képet nyertünk a légnemű testekről, kimutatván a légnemű és folyékony állapotok között létezhető folytonos átmenetet; kutatásokra inditott, melyek a folyékony és szilárd testek hasonló viszonyait iparkodnak földeriteni; egyszersmind rámutatott azon vizsgálatok fontosságára, melyek a physikai tulajdonságjelzők változásait a halmazállapotváltozások s itt is különösen a kritikus pont környezetében kutatják; a kisérleteknek egészen új irányát jelölte ki, mely a gázok folyósitását tűzte ki czélul s melynek következményeképen megnyilt az experimentális kutatások előtt az új tér, melyen a testek tulajdonságaival is igen mély hőmérsékleteken meg lehetett ismerkedni.

Ezen hatások egy részéről már szóltunk az előbbi összefoglalásokban (10 és 16. §.); most azon eredményekről akarunkáttekintést szerezni, melyeket a kisérletek a physikai tulajdonságjelzők változásairól még pedig különösen a halmazállapotváltozások és az extrem hőmérsékletek körül megállapitottak.

A közös tulajdonság, a mit e tulajdonságjelzőkről tapasztalhattunk, az, hogy nem állandók; kerestük azután a változásoknak a hőmérséklettel és a nyomással való összefüggését.

Láttuk, hogy a változások a legerősebbek és a legszabálytalanabbak akkor voltak, mikor a test halmazállapotát megváltoztatta; a halmazállapotváltozások egyik neme a kritikus állapotváltozás, ad, úgy látszik, ez alól kivételt képez; kevés esetben terjeszkedtek ki ugyanezen pontra a vizsgálatok, de ezek arra mutatnak, hogy a kritikus halmazállapotváltozásnál a tulajdonságjelzők változásai folytonosak. A maga teljességében ez csak a sűrűségnél derült ki, a melyről tudjuk, hogy mialatt a telített gőz eléri kritikus hőmérsékletét, és gázállapotba megy át, sűrűsége folytonos módon változik. Vannak még egyes körülmények, melyek szintén ezen folytonosságra mutatnak. A folyósitott gázok kiterjedési koefficziensei a hőmérséklettel együtt tetemesen nőnek és többnyire még távol elgőzitési pontjuk alatt már elérik a légnemű testek kiterjedési koefficzienseinek nagyságát; azonban a nyomás növekedésével csökken a kiterjedési koefficziens s így e két eredmény egybevetéséből várhatjuk, hogy ha az illető folyadékok hőmérsékletei és nyomásai kritikus hőmérsékleteik és nyomásaik felé közelednének, a kiterjedési koefficziensek értékei újra közelednének azon értékekhez, melyeket a testek légnemű állapotban mutatnak. Az elgőzítési meleg nem a kritikus hőmérsékleten lesz hirtelen zérussá, hanem közeledve hozzá, fokozatosan csökken. Épígy a folyadékok fajhője, a mint közeledünk a kritikus hőmérséklethez, már csökkenést mutat, mig attól távolabb növekszik.

Az olvadásnál és gőzölgésnél ellenben a változások ugrásszerűen történnek. A kiterjedés e pontokban hirtelen változik s így a sűrűség is; az elektromos ellenállás hirtelen nagyobb, vagy kisebb lesz stb. Mindezen körülmények csak annál fontosabbá teszik a kérdés direkt megvizsgálását, a mire eddig a kisérletek nagyon kevés számmal terjeszkedtek ki. A tény különben megegyezésben lenne felfogásunkkal, mely a kritikus pontot épen a folytonos átmenet által különbözteti meg a halmazállapotváltozás többi pontjától.

A mint a halmazállapotváltozás pontjaitól távozunk, a tulajdonságjelzők változásának hirtelensége és esetleg szabálytalansága csökken. Az idevágó jelenségek legjobban a légnemű testeknél ismeretesek; itt számos direkt kisérlet mutatja, hogy a telítéspontoktól távolabb a változások szabályosabbak. De a szilárd testeknél is látjuk, hogy egyenletesebb azon test kiterjedése, melynek olvadáspontja magasabban van; a folyadékoknál azon testé, melynek gőzölgési pontja messzebb esik. Épen, mivel a gázok sűrítéspontja, a szilárd testek olvadáspontja, a közönséges hőmérsékletektől igen távol vannak, tekinthetők a kiterjedések a 0—100° közben nagy közelitéssel egyenleteseknek. A hydrogén kiterjedése minden gázénál egyenletesebb, mert folyósítási pontja legmélyebben van; analógok miatt használhatjuk a higanyt a normális hőmérsékleti közben elég nagy pontossággal hőmérő anyag gyanánt. A változásoknak tényleges törvényeit még nem ismerjük. Általános érvényességű törvényeink csak a légnemű testeknél vannak, ezek is azonban ideális törvények (Boyle-Mariotte s Gay-Lussac törvénye), melyeknek nagyobb közelítésű érvényességéről épen a kritikus hőmérséklettől igen távol levő gázoknál s első sorban a hydrogénnél lehet szó. Az összefüggések átvitele a folyékony és a szilárd testekre még nem sikerült. Elméleti alapon próbálja a kérdést megoldani Van der Waals, kinek megfontolásaival ezután fogunk megismerkedni.

A kutatások azon iránya, melyek a tulajdonságjelzőket igen magas és igen mély hőmérsékletig vizsgálta, szintén fontos eredményekkel járt. Az elektromos ellenállás a tiszta fémeknél növekszik igen magas hőmérsékletekig, a nagyon mély hőfokoknál pedig 0 felé közeledik; ugyanígy a fajhő is igen mély hőmérsékleteknél 0-hoz közeledik; a színkép nagyon magas hőmérsékleteknél változást szenvedhet, nagyon mély hőmérsékleteknél megváltozik az abszorpczióképesség; a mágneses momentum nagyon magas hőmérsékleteknél csökken, nagyon alacsonyaknál növekszik. Még kevés az eredmény, de sok fontos van már közötte. Igen fontos azon eredmény, melyet Dewar nyert a fémek molekuláris összetartozására nézve; * kimutatta u. i., hogy a fémek molekuláris összetartozósága jelentékenyen emelkedik az igen alacsony hőmérsékleteknél. Ezen körülmény a molekuláris hőelmélet szempontjából is különös fontosságú.

A kutatásoknak ezen mély hőmérsékleti viszonyok körében is még tág tere van.

Péch Aladár.

* Chem. News. LXXI, pag. 199; 1895.

Kimutatás

az 1900 február és márczius havában befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek :

1893. évre : Bulyovszky Sándor ... 6 kor.

1894. évre : Szeremi Alajos ... 10 kor.

1895. évre : Bonis Károly 6 k., Felix János 6 k., Fogarasi Béla 6 k., Frosch Károly 6 k., Hassák Vidor 6 k., Kados Aladár 10 k., Kappel György 6 k., Klatt Virgil 6 k., Széchy Ákos 6 k. Összesen ... 58 kor.

1896. évre : Bartha Zsigmond 6 k., Dobay Sándor 6 k., Dohnányi Frigyes 6 k., Fodor László 4 k., Miklós Ödön 10 k., Nuricsán József 10 k., Schwicker Alfréd 6 k., Stahl Géza 6 k., Tatár Balázs 6 k., Váncza Mihály 6 k. Összesen ... 66 kor.

1897. évre : Angheben Albin 6 k., Aranyosi Miksa 10 k., Bartoniek Géza 10 k., Bein Károly 10 k., Bukuresti B. János 6 k., Fodor László 6 k., Kacsoh Pongrácz 6 k., Kiss Károly dr. 10 k., Konkoly Miklós 10 k., Nesnera Aladár 6 k., Perényi Vilmos 6 k., Pfeiffer Péter 6 k., Simon Ferencz 6 k., Söpkéz Sándor 10 k. Összesen ... 108 kor.

1898. évre: Balog Mór 10 k., Bartoniek Géza 10 k., Benkó Imre 6 k., Boros Sándor 6 k., Bukuresti B. János 6 k., Fabinyi Rezső 6 k., Gidófalvy Géza 6 k., Héjas Endre 6 k., Hubatsek Alajos 10 k., Kuthy József 6 k., Medveczky István 6 k., Medvigy János 6 k., Muraközy Károly 10 k., Németh Antal 6 k., Pap Lajos 6 k., Perényi Vilmos 6 k., Perjessy László 6 k., Ratkovszky Pál 2 k., Steécz György dr. 6 k., Szavkay Ede 10 k., Tordai Imre 10 k. Összesen ... 146 kor.

1899. évre: Arató Frigyes 6 k., Asbóth Emil 10 k., Berecz Antal 10 k., Bodola László 6 k., Csajkás Mihály 6 k., Czencz Aladár 6 k., Eberhardt Béla 6 k., Guta József 6 k., Harkányi Béla br. 3 k., Havass Miksa 6 k., Heinrich Theophil 10 k., Héjas Endre 4 k., Kalecsinszky Sándor 10 k., Képessy Imre 10 k., Kiss Tamás 6 k., ifj. Konkoly Miklós 6 k., Magyar László 10 k., Matyasovszky Kászon 6 k., Medvigy János 6 k., Novothny Endre 6 k., Pallagi Gyula 6 k., Rózsa István 6 k., Steiner Miklós 6 k., Strompf László 6 k., Szuppan Vilmos 10 k., Wagner Alajos dr. 10 k. Összesen 183 kor.

1900. évre : Abt Antal dr. 6 k., Antolik Károly 6 k., Arató Frigyes 6 k., Asbóth Emil 10 k., Barabás Jenő 6 k., Baranyi Balázs 6 k., Bauer Mihály 10 k., Bretz Berta 6 k., Bukovszky János 6 k., Butorka Száva 6 k., Csorba György 6 k., Czakó Adolf 10 k., Demeter István 6 k., Dirner Gusztáv 10 k., Dischka Győző 6 k. Eberhardt Béla 6 k., Eberling József 10 k., Eltscher Simon 6 k., Eötvös Loránd b. dr. 10 k., Frank István 6 k., ifj. Füzy Rezső 10 k., Goldziher Károly 6 k., h. Gotthard Jenő 6 k., Gruber Nándor 10 k., Hahóthy Sándor 10 k., Harkányi Béla b. 6 k., Heller Ágost 10 k., Heller Richárd 6 k., Heuer Ede 10 k., Hortobágyi Zsigmond 6 k., Janell József 6 k., Jónás Ödön 10 k., Károly Irén 6 k., Károlyi Lajos 10 k., Kirchknopf András 6 k., Kiss Gábor 6 k., Kisgyörgy János 6 k., Klein Pál 6 k., Klúg Lipót 4 k., Klúg Nándor 10 k., Kmety János 6 k., Kopp Lajos dr. 10 k., Koschovitz Gyula 10 k., Kovács Ferencz 6 k., König Gyula dr. 10 k., ifj. Konkoly Miklós 6., Kövi Imre 6 k., Krüger Viktor 6 k., Lengyel Imre 6 k., Lipthay Sándor 10 k., Lóky Béla dr. 6 k., Magdics Gáspár 6 k., Markoss Imre 6 k., Mátray Rudolf 6 k., Medveczky Lajos 10 k., Mihalovich Alajos 6 k., Miller Gyula 6 k., Módly Krizsó 6 k., Neumann Jenő 6 k., Neustadt Lipót 10 k., Nikolits Lázár 6 k., Novothny Endre 6 k., Palatin Gergely 6 k., Pethő Menyhért dr. 6 k., Petry Gyula 6 k., Pilcz Ottó 10 k., Privorszky Alajos 6 k., Prokess Ignácz 6 k., Rados Gusztáv 10 k., Rados Ignácz 10 k., Rátz László 10 k., Recsei L. Farkas 6 k., Rejtő Sándor 10 k., Rigler Sándor 6 k., Rucsinszky Lajos 10 k., Sárkány Lajos dr. 6 k., Schmidt Ferencz 10 k., Schmidt Sándor 10 k., Schöndorfer Gyula 6 k., Schuller Alajos 10 k., Schwarcz Ottó dr. 6 k., Simon Tádé 6 k., Stanics Fulgent 6 k., Stauber József 6 k., Strausz Ármin 10 k., Szabó János 6 k., Szabó József (Vácz) 6 k., Székely Károly 6 k., Széky István 6 k., Szenessy Mihály 10 k., Szokol Pál 6 k., Takács Gyula 6 k., Tangl Károly dr. 10 k., Terlanday Emil 6 k., Thanhoffer Lajos 10 k., Tötössy Béla 10 k., Vámos Dezső 10 k., Vörös Cyrill 6 k., Walther Béla 6 k., Wartha Vincze dr. 10 k., Wittmann Ferencz 10 k. 55 à 6 k., 32 à 10 k. Összesen 752 kor.

1901. évre: Klúg Lipót ... 6 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1896—1900. évekre: az ungvári fg. ... 50 kor.

1900. évre: a bpesti II. k. fr. isk., a bpesti VI. k. áll. fr. isk., a brassói főreálisk., a csiksomlyói fg., Kilián Frigyes (30 k.), Kunstädter Temesvár (1/2 évre 5 k.), a lőcsei fr. isk., a privigyei g., a pannonhalmi főapáts. könyvt., a sz.-udvarhelyi áll. főreálisk. és a r.-k. fgymn., a sz.-fehérvári fr. isk., a szegszárdi áll. fg., a szakolczai fg. à 10 k. Összesen ... 155 kor.

Összesen befolyt:

Hátrálékokból 577 kor. jan 1-től ... 660 kor.
Folyó és 1901. évi tags. dijakból 758 kor. jan. 1-től ... 836 kor.
Előfizetési dijakból 205 kor. jan. 1-től ... 447 kor.

Bpest, 1900 ápr. 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

A Γ-FÜGGVÉNY EGYIK TULAJDONSÁGA.

1. Az analizisben szereplő legtöbb függvénynek megvan az a tulajdonsága, hogy a független változó, az illető függvény és e függvény bizonyos meghatározott számú differencziálhányadosa között algebrai egyenlet áll fenn. Más szóval: ezek a függvények eleget tesznek egy

$$G(x; y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$$

algebrai differencziálegyenletnek, melynek együtthatói x raczionális függvényei. A Γ függvénynek az a nevezetes tulajdonsága van, *hogy ilyen algebrai differencziálegyenletnek nem tesz eleget.*

Weierstrass volt az első, a ki erre élő szóval figyelmeztetett, Hölder * pedig 1887-ben a tételt be is bizonyította. Azóta Moore ** foglalkozott ezzel a kérdéssel és a Γ-függvényen kívül még két — lényegben a Freedholm-féle transzczendenssel megegyező — analytikai függvényre mutatta ki ezt a nevezetes tulajdonságot.

A következőkben a Hölder-féle gondolatmenet némi egyszerűsítésével bizonyitjuk be ezt a Γ-függvényre vonatkozó tételt. A Freedholm-féle transzczendensre vonatkozólag ugyancsak a Hölder-féle eljárás alkalmazható.

2. A tétel bebizonyításánál a Γ-függvénynek egyetlen tulajdonságára van szükségünk, arra, a melyet kézikönyveink a Γ-függvény első tulajdonságának neveznek. Ez a következő:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

---

* Hölder: Über die Eigenschaft der Gammafunctionen etc. Math. Ann. 28. p. 1.

** E. H. Moore: On transcendentally transcendental functions. Math. Ann. 48. p. 49.

Ebből ered a következő:

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}.$$

Ha a Γ-függvény logarithmikus differencziálquotiensét $\varphi(x)$-el jelöljük, akkor tehát:

$$\varphi(x+1) = \varphi(x) + \frac{1}{x}$$

és általában:

$$\varphi^{(k)}(x+1) = \varphi^{(k)}(x) + \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}. \qquad 1)$$

Először azt mutatjuk meg, hogy $\varphi(x)$ nem tehet eleget olyan algebrai differencziálegyenletnek, melynek együtthatói x raczionális függvényei.

3. Tegyük föl az ellenkezőt. Azon algebrai differencziálegyenletek közül, melyeknek φ eleget tesz, szemeljünk ki olyant, melynek baloldala, mint a (határozatlant jelölő)

$$y, y', y'', \ldots$$

raczionális egész függvénye, a legalacsonyabb fokú. Legyen ez a fokszám m. A mennyiben pedig ilyen is több lehetséges; szemeljük ki ezek közül azt, a melyben az m-edfokú tagok száma a legkisebb.

Ez a legkisebb tagszám legyen r. Akkor tehát a kiszemelt differencziálegyenlet ilyen alakra hozható:

$$G = P_1 + R_2(x)P_2 + \cdots + R_r(x)P_r + [m-1] = 0 \qquad 2)$$

a hol a P függvények ilyen alakúak:

$$y^{\alpha_0}(y')^{\alpha_1}(y'')^{\alpha_2}\ldots \qquad 3)$$
$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots = m$$

az $[m-1]$ pedig az $y, y', y'', \ldots$ m-nél alacsonyabb fokú egész függvénye és az R függvények az x raczionális függvényei. Ha a 2) alatti differencziálegyenletet kielégíti a $\varphi(x)$, akkor $\varphi(x+1)$ kielégíti azt a differencziálegyenletet, a mely 2)-ből az által keletkezik, hogy x helyett $x+1$-et és $y(x), y'(x), y''(x), \ldots$ helyett $y(x+1), y'(x+1),$

$y''(x+1), \ldots$ teszszük. Azaz, nemcsak:

$$G\,[x\,;\,\varphi(x),\,\varphi'(x),\,\varphi''(x),\ldots] = 0,$$

hanem egyúttal

$$G\,[x+1;\,\varphi(x+1),\,\varphi'(x+1),\,\varphi''(x+1),\ldots] = 0$$

algebrai egyenlet is fönnáll; tehát fönnáll a

$$\begin{aligned} H = G\,[x+1;\,\varphi(x+1),\,\varphi'(x+1),\ldots] - \\ - G\,[x\,;\,\varphi(x),\,\varphi'(x),\ldots] = 0 \end{aligned} \qquad 4)$$

egyenlet is. Helyettesítsük itt a $\varphi(x+1)$, $\varphi'(x+1), \ldots$ helyett az 1) alatti egyenletben foglalt értékeket. Szemeljünk ki egy m-edfokú tagot. Legyen ez:

$$P_k(x) = \varphi^{\alpha_0}(x)\,[\varphi'(x)]^{\alpha_1}\,[\varphi''(x)]^{\alpha_2} \ldots [\varphi^{(n)}(x)]^{\alpha_n}. \qquad 5)$$
$$\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n = m$$

Ebből a következő lesz:

$$P_k(x+1) = \left[\varphi(x)+\frac{1}{x}\right]^{\alpha_0}\left[\varphi'(x)-\frac{1}{x^2}\right]^{\alpha_1}\left[\varphi''(x)+\frac{1}{x^3}\right]^{\alpha_2}\cdots$$
$$\left[\varphi^{(n)}(x)+\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\right] = P_k(x) + [m-1]. \qquad 6)$$

Ebből következik, hogy a 4) alatti egyenlet baloldalán a P_1-gyel jelölt m-dimenziós tag, melynek együtthatója 1 volt, nem fordul már elő. A P_k pedig, melynek eredeti együtthatója a 2)-ben $R_k(x)$ volt, a 4)-ben

$$R_k(x+1) - R_k(x)$$

együtthatóval lép fel. A $\varphi(x)$ tehát eleget tesz egy oly

$$H(x\,;\,y,\,y',\,y'',\ldots) = 0 \qquad 7)$$

algebrai differencziálegyenletnek, melynek baloldala mint az y, y', y'', ... egész függvénye m-nél nem magasabb fokú és kevesebb m-dimenziós tagot tartalmaz, mint az eredeti G. Ez pedig feltevésünkkel ellenkezik; tehát kell, hogy a H egész függvény azonosan tünjék el, azaz minden együtthatója 0 legyen.

Vizsgáljuk meg ezeket az együtthatókat. Kell tehát, hogy minden

$$R_k(x+1)-R_k(x)=0$$

legyen minden x-nél. Ebből következik, hogy általában

$$R_k(x+m)=R_k(x),$$

a hol m tetszés szerinti egész szám. Az $R_k(x)$ raczionális függvénynek szakaszosnak kellene lennie, a mi csakis akkor lehet, ha ez a raczionális függvény x-től független. Az első eredményünk tehát az, hogy a *G egész függvény legmagasabb fokú tagjainak együtthatói állandók.*

Vizsgáljuk most meg a H-ban fellépő $m-1$-edfokú tagokat. Midőn az 5) alatti kifejezésben x helyett $x+1$-et tettük; a 6) alatti alakot kaptuk. Szemeljük ki azt a P tagot, a melyben a legmagasabbrendű differencziálhányados fordul elő és ha ilyen több van, ezek közül azt, a melyben a legmagasabb hatványon van ez a legmagasabb rendű differencziálhányados. Legyen ez a tag:

$$P(x) = \varphi(x)^{\alpha_0}[\varphi'(x)]^{\alpha_1}\ldots[\varphi^{(n)}(x)]^{\alpha_n}.$$

Ha x helyett $x+1$-et teszszük, ebből

$$P(x+1) = \left[\varphi(x) + \frac{1}{x}\right]^{\alpha_0}\left[\varphi'(x) - \frac{1}{x^2}\right]^{\alpha_1}\left[\varphi''(x) + \frac{1}{x^3}\right]^{\alpha_2}\ldots$$
$$\left[\varphi^{(n)}(x) + \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\right]^{\alpha_n}$$

lesz. Ebből keletkezik a kiszorzásnál a következő $m-1$-edfokú tag is:

$$\frac{(-1)^n\,\alpha_n}{x^{n+1}}[\varphi(x)]^{\alpha_0}[\varphi'(x)]^{\alpha_1}\ldots[\varphi^n(x)]^{\alpha_n-1}. \qquad 8)$$

Ehhez hasonló tag csakis olyan P-ből keletkezhetik, a mely ilyen alakú:

$$\varphi^{(l)}(x)\,\varphi(x)^{\alpha_0}[\varphi'(x)]^{\alpha_1}\ldots[\varphi^n(x)]^{\alpha_n-1}$$

és l az n-től különböző. Az ebből keletkező, 8)-hoz hasonló tag:

$$\frac{(-1)^l}{x^{l+1}}[\varphi(x)]^{\alpha_0}[\varphi'(x)]^{\alpha_1}\ldots[\varphi^n(x)]^{\alpha_n-1}.$$

A 8)-hoz hasonló tagok együtthatói tehát az x-et a nevezőben alacsonyabb hatványon tartalmazzák, mint a 8) alatti kifejezés.

A 8)-hoz hasonló tag keletkezhetik még a 4) alatti egyenletben a 2) alatti egyenlet egyik $m-1$-edfokú tagjából is. Ha ugyanis az $[m-1]$-nek egyik tagja:

$$R(x)\,\varphi(x)^{\alpha_0}[\varphi'(x)]^{\alpha_1}\ldots[\varphi^{(n)}(x)]^{\alpha_{n-1}},$$

akkor ebből a 4)-ben a következő lesz:

$$[R(x+1)-R(x)]\,\varphi(x)^{\alpha_0}[\varphi'(x)]^{\alpha_1}\ldots[\varphi^{(n)}(x)]^{\alpha_{n-1}}.$$

A 8) alattihoz hasonló tag együtthatója a 4) alatti egyenletben tehát ilyen alakú:

$$\frac{A_1}{x^{n+1}}+\frac{A_2}{x^l}+\cdots+R(x+1)-R(x), \tag{9}$$

a hol A_1 0-tól okvetlenül különbözik. Ennek kellene minden x érték mellett eltünnie. Az

$$\frac{A_1}{x^{n+1}}+\frac{A_2}{x^l}+\cdots$$

elül álló résznek egyetlen pólusa $x=0$; tehát a 9) alatti kifejezés csakis akkor tünhetik el, ha $R(x+1)-R(x)$-nek is pólusa, még pedig egyetlen pólusa $x=0$. Ez pedig lehetetlen. Ugyanis kellene, hogy vagy $R(x)$-nek vagy $R(x+1)$-nek $x=0$ pólusa legyen.

Tegyük fel általában, hogy a természetes számsorban p a legnagyobb és q a legkisebb egész szám, a melynél $R(x)$ végtelenné válik. Megengedjük a $p=q$-t is. Akkor

$$R(x+1)-R(x)\text{-}$$

nek okvetlenül egyik pólusa p, mert p pólusa R-nek, de $p+1$ már nem az; és egy másik pólusa okvetlenül $q-1$, mert $q-1$ pólusa $R(x+1)$-nek, de nem pólusa $R(x)$-nek. Ebből látszik, hogy $R(x+1)-R(x)$-nek legalább 2 pólusa van; tehát a 9) alatti kifejezés nem lehet azonosan 0. *Ezzel tehát be van bizonyítva, hogy $\varphi(x)$ nem tehet eleget algebrai differencziálegyenletnek.*

4. A bebizonyítást most már könnyen befejezhetjük. Tegyük fel

ugyanis, hogy Γ eleget tesz egy algebrai differencziálegyenletnek, azaz fennáll ilyen egyenlet:

$$G(x; \Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots, \Gamma^{(n)}) = 0 \qquad 10)$$

vagyis a Γ függvény eleget tesz ezen algebrai differencziálegyenletnek:

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad 11)$$

Helyettesítsük

$$y' = yz$$

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z') \qquad 12)$$

és általában

$$y^{(k)} = yZ,$$

a hol Z a $z, z', \ldots, z^{(k-1)}$ raczionális egész függvénye. A 11) alatti egyenlet a következő alakúvá lesz:

$$G_1(x; y, z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}) = 0, \qquad 13)$$

mely ki lesz elégítve, ha $y = \Gamma$ és $z = \varphi$ teszszük, mert hiszen a 12) alatti egyenleteknek ezek a függvények megfelelnek. Ez a 13) alatti egyenlet nem lehet identitás oly értelemben, hogy az y hatványainak együtthatói minden z függvény esetében azonosan eltünnének; mert akkor a 11) alatti egyenletnek is azonosan kellene minden y mellett eltünnie; mert hiszen ha z egészen tetszőlegesen választható, akkor a 12) alatti egyenletekből y-nak is egészen tetszőleges értéke adódik ki.

A 13) alatti egyenletnek az y-t okvetetlenül kell tartalmaznia, mert különben algebrai differencziálegyenlet volna a z függvényre, melynek egyik megoldása φ lenne, a mi pedig lehetetlenség. Ha tehát a Γ függvényre vonatkozólag fennáll a 10) alatti egyenlőség, akkor kell, hogy a Γ függvény eleget tegyen egy 13) alakú algebrai differencziálegyenletnek, melyben y okvetlenül előfordul és $z, z', \ldots$ a 12) egyenletből következnek.

Szemeljünk ki az összes, lehető, 13) alatti egyenletek közül egyet, a melyben y a legalacsonyabb hatványon szerepel, és legyen az ilyen alakú:

$$y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \cdots + A_n = 0, \qquad 14)$$

a hol az A együtthatók az x és $z, z', z'', \ldots$ raczionális függvényei. Ezen egyenlet differencziálásával és a 12) alatti egyenletek figyelembe vételével

$$y^n+B_1y^{n-1}+B_2y^{n-2}+\cdots+B_n=0 \qquad 15)$$

egyenletre jutunk, a hol

$$nz\,.\,B_i=A_i'+(n-i)\,A_iz.$$

A 14) és 15) egyenletekből pedig következik:

$$C_1y^{n-1}+C_2y^{n-2}+\cdots+C_n=0, \qquad 16)$$

a hol

$$C_i=A_i'-iA_iz.$$

Föltételünk szerint a 14) alattinál alacsonyabb fokú egyenlet a Γ-ra nézve nem létezik, tehát kell, hogy minden:

$$C_i=A_i'-iA_iz=0 \qquad 17)$$

legyen, és pedig identikusan, mert különben a φ ezen $C_i=0$ algebrai differencziálegyenletnek tenne eleget.

Az A együtthatók között okvetlenül van olyan, mely 0-től különbözik; legyen egy ilyen együttható pl. A_i, vagy részletesebben írva:

$$A_i(x, z, z', \ldots, z_r).$$

Az el nem tűnő A együtthatók közül azt szemeltük ki, mely a z-ket is tartalmazza. Ilyennek is kell okvetetlenül lennie, mert különben a Γ függvény algebrai függvény lenne.

Ha az A_i-ben a z differencziálhányadosai közül a legmagasabb rendű az r-dik, akkor arra az A_i-re alkalmazva, a 17) alatti egyenlet a következő alakú:

$$\frac{\partial A_i}{\partial z^{(r)}}z^{(r+1)}+\sum\frac{\partial A_i}{\partial z^{(k)}}z^{(k+1)}+\frac{\partial A}{\partial x}=iA_iz. \qquad 17a)$$

Ennek az egyenletnek identikusnak kell lennie, azaz minden z függvényalak mellett fönn kell állania. Válaszszuk az x_0 kezdő érték mellett a tetszőleges z függvény kezdő értékeit, a

$$z_0,\ z_0',\ z_0'',\ \ldots,\ z_0^{(r)}$$

állandókat úgy, hogy

$$\frac{\partial A_i}{\partial z^{(r)}}$$

ezen kezdőértékek mellett 0-tól különbözzék. A $z^{(r+1)}$ kezdőértéke akkor mindig választható oly módon, hogy a 17a) alatti egyenlet ne legyen kielégítve. Ezzel be van bizonyítva, hogy a 16) alatti egyenlet együtthatói nem tünhetnek el azonosan, vagyis: *olyan algebrai differencziálegyenlet, melyet a Γ függvény kielégítene, nem lehetséges.*

Beke Manó.

HÁROM TETRAÉDER HIPERBOLIKUS KAPCSOLATBAN.

(Második és befejező közlemény.)

5. *Az előbbivel kapcsolatos sugárkongruencziák.*

Ama hiperbolikus sugársornak, melybe a p', q', r', s' tartozik, a Π, Π_1, Π_2,... polárrendszerek mindenikében megfelel egy-egy hiperbolikus sugársor. Ezen ∞^2 számban levő sugarakat I-es sugaraknak nevezzük. Ezek egy K_I sugárkongruencziát alkotnak. Ugyanez áll a H' hiperbolikus másodrendű felület másik alkotó-sorának megfelelő II-es sugarakról, melyek a K_{II} sugárkongruencziát alkotják. E kongruencziák az előbbivel és egymással szoros kapcsolatban állanak.

Elég lesz különösen egyikkel, pl. a K_I-gyel foglalkoznunk.

Ennek rendjét a következőképen állapitom meg. A tér tetszőleges X pontjának a Π, Π_1, Π_2,... polárrendszerekben megfelelő síkok egy x' elsőrendű síksor elemei. Az x' egyenesen keresztül a H' felülethez két ξ_i, ξ_k érintő sík tehető, melyek mindenike tartalmazza a $p'q'r's'$ sugársor egy elemét. Tehát van két oly polárrendszer Π_i és Π_k, melyben ξ_i, illetőleg ξ_k polusa X; e polárrendszerekben a ξ_i ill. ξ_k minden egyenesének és így a $p'q'r's'$... sugársorban levő egyenesének megfelelője is az X pontban van.

E szerint a tetszőleges X pont a K_I kongruenczia két elemét tartalmazza.

Ép így a tetszőleges σ siknak a Π, Π_1, Π_2,... polárrendszerekben megfelelő polusok geometriai helye egy k harmadrendű görbe, mely a H' felületet legfölebb hat pontban metszi; az előbbivel analog okoskodás alkalmazásával tehát belátjuk, hogy e σ sik a K kongruencziának hat elemét tartalmazza, vagyis az hatodosztályú.

Minden bebizonyítás nélkül világos, hogy a H, H_1, H_2,... felületek nyolcz közös pontja szinguláris pontja a K_I-nek is.

Hogy a Γ komplexus főpontjai is szinguláris pontjai e kongruencziának, azt a következő megfontolás mutatja. Az $LMNO$ közös polártetraédere a Π, Π_1, Π_2, polárrendszer-sornak, mindenik szögpontja duplapontja e polárrendszer-sorba tartozó egy elfajult polárrendszernek, azaz olyannak, melynek alapfelülete egy másodrendű kúp. Ily polárrendszerben a $p'q'r's'$... hiperbolikus sugársornak — ha egy eleme sincs az illető dupla pontban — megfelel ama dupla pontban egy másodrendű kúp alkotó sora. Ámde akkor e kúp minden alkotója a K_I-be tartozik.

És így látjuk, hogy a K_{III} és K_I szinguláris pontjai közösek.

Még egyszerűbben belátjuk ezt, ha tekintetbe veszszük, hogy a $p'q'r'$... sugársorba tartozó tetszőleges x' egyenes pontjaihoz a Π, Π_1, Π_2,... polárrendszerekre nézve többszörösen konjugált sugarak vezérvonalai azon sugársornak, mely az x' polárisaiból alakul.

E pont eredményei röviden összefoglalva:

A $p'q'r's'$... hiperbolikus sugársornak a Π, Π_1, Π_2,... polárrendszerekben megfelelő sugársorok egy másodrendű és hatodosztályú K_I sugárkongruencziába tartoznak, melynek szinguláris pontjai a H, H_1, H_2,... felületek nyolcz közös pontja, valamint e polárrendszerek közös polártetraéderének szögpontjai.

II. Különös eset.

Az eddigiek után át kell térnünk a már érintett különös eset tárgyalására, midőn a $p'q'r's'$... hiperbolikus sugársor minden eleme a Γ komplexbe tartozik. Erre nézve azonban néhány tételt kell előre bocsátanunk.

6. *Projektiv hiberbolikus sugársorok.*

Ha két projektiv hiperbolikus sugársor, R és R_1, olyan, hogy — bár különböző H és H_1 másodrendű felületeken vannak és nem tekinthetők két perspektiv tér megfelelő alakzatjainak — mindenik sugaruk metszi a megfelelőjét, de megfelelően közös elemeket nem *tartalmaznak, akkor e két sugársor vagy egy elsőrendű pontsorhoz, vagy egy elsőrendű síksorhoz perspektiv.*

Feltéve, hogy az R és R_1 sugársorok nem perspektivek egy elsőrendű pontsorhoz, kimutatjuk, hogy a megfelelő egyenesek metszéspontjai egy harmadrendű görbét alkotnak.

A megfelelő e és e_1 sugarak S metszéspontjából projicziálván úgy az R, mint R_1 sugársort, két projektiv elsőrendű síksort kapunk, melyeknek képződményük egy másodrendű kúp.

E kúp minden alkotója két megfelelő sugár metszéspontját projicziálja és fordítva: ily metszéspontot S-ből projicziálván, e kúp egy alkotóját kapjuk.

Ha már most egy másik f és f_1, megfelelő sugárpár T metszéspontjából ugyanígy projicziálom az R és R_1 sugársorokat, ismét két projektiv elsőrendű síksort kapok, melyeknek képződményük újból egy másodrendű kúp, mely a megfelelő sugárpárok metszéspontjait, így az S-et is projicziálja.

De ekkor e két S és T kúp, melynek $\overline{ST}$ közös alkotója, egymást oly harmadrendű görbében metszi, mely az R és R_1 megfelelő sugarainak metszéspontjait köti össze.

Az $[e\,e_1]$ sík már most e harmadrendű görbéből az S ponton kívül még két pontot metsz ki, mely rajta van úgy az R, mint az R_1 azon vezérvonalán, mely ezen síkban van, és így e két vezérvonal összeeső, legyen v.

Ezen közös vezéregyenes minden síkja két megfelelő sugarat projicziál az R-ből és R_1-ből; mert tartalmazza közös pontjukat és ezen v vezérvonalon levő pontjaikat. Ezzel a kimondott tétel be van bizonyitva.

Lehetséges, hogy az R-nek és R_1-nek van egy vagy két megfelelően közös sugara. Ha egy ilyen van, úgy az említett harmadrendű görbe degenerál e közös sugárra és egy kúpszeletre, melyhez a két hiperbolikus sugársor perspektiv. Ha két megfelelően közös sugár van, úgy az említett harmadrendű görbe ezen két sugárra és egy közös vezéregyenesre degenerál, ekkor a két sugársor perspektiv ezen utóbbi elsőrendű pontsorhoz és egyszersmind egy elsőrendű siksorhoz.

A tételben említett két esethez képest ez utóbbiakat átmeneti formáknak nevezzük.

7. *A másodrendű és másodosztályú sugárkomplexus hiperbolikus sugársorairól.*

Ha a Γ komplexus a Σ és Σ_1 projektiv terek képződménye és e meg e_1 e terek két megfelelő egyenese, úgy ezek vagy mètszik egymást vagy nem. Ha metszik egymást, úgy mindkettő beletartozik a komplexbe; ha nem, úgy egyik sem tartozik bele.

Mindkét esetben e két egyenes két megfelelő pontsornak és síksornak sorozója. Az első esetben a megfelelő pontsorok képződménye egy másodosztályú komplexus-görbe, melynek minden érintője komplex-sugár, míg a megfelelő síksorok képződménye egy másodrendű komplex-kúp, melynek minden alkotója komplexus-sugár.

A második esetben a két pontsor képződménye egy a komplexusba tartozó hiperbolikus sugársor, mely egyik alkotó sora valamely a fősíkok mindenikét érintő F másodosztályú hiperbolikus felületnek. A két síksor képződménye szinte egy a komplexusba tartozó hiperbolikus sugársor, egyik alkotósora oly G másodrendű felületnek, mely az összes főpontokon áthalad.

Van tehát négyszeresen végtelen sok F és ugyanannyi G felület, a melynek egyik alkotó-sora a Γ komplexbe tartozik.

Kérdés már most, hogy oly hiperbolikus sugársor, melynek minden eleme a komplexusba tartozik, szükségkép ezen F vagy G felületek egyik alkotósora-e vagy sem?

Ha R ily hiperbolikus sugársor, azt Σ térhez sorozván, neki Σ_1-ben megfelel oly R_1 sugársor, melynek minden eleme az R megfelelő elemét metszi; ámde akkor van egy e_1 elsőrendű pont- vagy síksor, melyhez e két projektiv hiperbolikus sugársor perspektiv. Ezen e_1 közös vezérvonala a két sugársornak.

Vévén az első esetet a Σ_1 térhez sorozott e_1 pontsornak megfelel R-nek egy e vezérvonala a Σ térben. És ha a egy eleme R-nek, ez komplex-sugár, tehát a Σ és Σ_1 tér két megfelelő pontját köti össze. Messe ez az egyenes az e-t A pontban; ennek, mint a Σ egy pontjának megfelelője A_1 rajt van az R_1 megfelelő a_1 sugarán, de egyszersmind az e_1 vezérvonalán is, tehát azonos az $(a\, a_1)$ ponttal.

Más szóval az R képződménye a Σ tér egy e és a Σ_1 tér megfelelő e_1 pontsorának és így valamely F másodosztályú felület egyik alkotósora.

A második esetre, midőn t. i. R és R_1 egy elsőrendű síksorhoz perspektiv, ép úgy kimutathatom, hogy ezen R sugársor valamelyik G felület egyik alkotósora.

Ezen F és G felületek azon alkotósorát, melynek minden eleme komplex-sugár, nevezzük röviden F ill. G komplexussugár-sornak.

Ezek után a felvetett kérdésre a következő tétellel felelhetünk:

Ha valamely hiperbolikus sugársor minden eleme a komplexusba tartozik, úgy az a Σ és Σ_1 tér két megfelelő elsőrendű pontsorának, vagy síksorának képződménye.

Tehát ha ily sugársorokról van szó, vagy valamely F, vagy valamely G sugársorral van dolgunk; de vannak olyan hiperbolikus sugársorok is, melyek tekinthetők úgy F, mint G sugársoroknak; az ilyenek a főtetraéder két szemben eső élét tartalmazzák. A következőkben figyelmen kívül hagyjuk azon hiperbolikus sugársorokat, melyek a főtetraédernek egy vagy két élét tartalmazzák, a szives olvasóra bizván e tekintetben tárgyalásaink kiegészítését.

Valamely a Σ térhez sorozott F komplexussugár-sornak, mely a főtetraéder egy élét sem tartalmazza, és a Σ_1 tér megfelelő F_1 sugársorának képződménye egyrészt az e_1 elsőrendű pontsor, másrészt egy $\varkappa_1$ harmadrendű síksor, melybe a főtetraéder lapjai beletartoznak. E harmadrendű síksor minden síkja az F és F_1 sugársor két megfelelő elemét köti össze. A $\varkappa_1$ valamely $[a\,a_1]$ síkját a Σ_1 térhez sorozván a Σ térben neki megfelelő sík az a egyenesen megy keresztül. Ennek alapján kimondhatjuk a következő tételt:

Minden F komplexussugársor a Σ és Σ_1 tér két megfelelő elsőrendű pontsorának és egyszersmind két megfelelő $\varkappa$ és $\varkappa_1$ harmadrendű síksorának képződménye, melyeknek a főtetraéder lapjai megfelelően közös elemeik.

Minden G komplexussugársor a Σ és Σ_1 tér két megfelelő elsőrendű síksorának és egyszersmind két megfelelő k és k_1 harmadrendű pontsorának képződménye, melyeknek a főpontok megfelelően közös elemeik.

Kiemeljük, hogy e tételben említett harmadrendű sík-, ill. pontsorok nem *sorozó* sík-, ill. pontsorai a komplexusoknak; mert pl. az F és F_1 közös e_1 vezérvonala nem tartozik a komplexbe, ellenben beletartozik a $\varkappa_1$ síkjainak metszésvonalaiból alakult sugárkongruencziába; már pedig, ha $\varkappa_1$ a Γ komplexus sorozó síksora volna, úgy e kongruenczia minden eleme a komplexbe tartoznék.

8. *A különös eset lehetősége.* Ezek után megfelelhetünk első sorban arra a kérdésre, vajjon egyáltalán lehetséges-e, hogy a három hiperbolikus viszonyban levő tetraéderrel együtt adott $p'q'r's'$... sugársor minden eleme beletartozzék a Γ komplexusba, a mely — mint tudjuk — e tetraéderekkel meg van határozva?

E kérdésre legegyszerűbben úgy felelünk meg, hogy adottnak tekintjük a $\Sigma\Sigma_1\Sigma_2$... projektiv térsort és az ezzel meghatározott Γ komplexust, továbbá felveszünk egy e komplexusba tartozó hiperbolikus sugársort és megkisértjük a kérdéses tetraéderek szerkesztését.

Szem előtt tartjuk e tetraéderek között fennálló és a 2. pont *I*) *II*) *III*) képletéből leolvasható azon kapcsolatot, mely szerint az $A_1B_1C_1D_1$ tetraédernek, ha Σ_1-hez, ill. Σ_2-höz sorozzuk, a Σ-ban megfelel $ABCD$, ill. $A'B'C'D'$ tetraéder.

Első sorban látjuk, hogy a felveendő hiperbolikus sugársor nem lehet valamely F komplexussugár-sor; mert a Σ és Σ_1 tér azon megfelelő pontjai, melyek ily F felületen vannak, egy-egy elsőrendű pontsorba tartoznak, tehát azokból nem lehet e két tér megfelelő tetraédereit alkotni.

Vegyünk tehát egy G komplexsugár-sort. Ha ezt a Σ térhez sorozzuk, úgy Σ_1 térben neki megfelel a G_1 komplexussugár-sor, mely az előbbit egy k_1 harmadrendű görbében metszi, mely a főpontokon áthalad. Ennek a görbének, mint a Σ_1 pontsorának megfelel a k görbe a G felületen. A k és k_1 pontsorok projektivek egymáshoz és perspektivek a G sugársorhoz.

A térsor Σ_2 terében a Σ-hoz sorozott G komplexussugár-sornak megfelelő G_2 komplexsugár-sor szintén a k_1 görbében metszi a G-t, mert a komplexus tetszőleges e sugarának, ha azt Σ-hoz sorozzuk, a Σ_1, Σ_2,... terekben megfelelő sugarak az e-vel együtt egy másodrendű kúp alkotói. Ha már most k_1-et a Σ_2-höz sorozzuk, neki Σ-ban megfelelő k' görbe szintén a G felületen van és projektiv úgy a k_1-hez, mint a k-hoz és mindhárom perspektiv a G komplexussugár-sorhoz.

A G komplexsugár-sorban levő, de a főpontok egyikét sem tartalmazó, különben tetszőleges négy p', q', r', s' egyenes a k, k' és k_1 görbékből kimetszi az A, B, C, D, ill. A', B', C', D' és A_1, B_1, C_1, D_1 pontokat. Az $A_1B_1C_1D_1$ tetraédert Σ_1-hez, ill. Σ_2-höz sorozván, neki Σ-ban az $ABCD$, ill. $A'B'C'D'$ tetraéder felel meg.

A Σ'' tért a Σ-val és Σ_1-gyel polárrecziprok vonatkozásba hozom, ha az elemek összetartozandóságát a következő képletekkel állapítom meg:

$$(A'B'C'D'D \ldots) \barwedge (\alpha\beta\gamma\delta\delta' \ldots)$$
$$(A'B'C'D'D_1 \ldots) \barwedge (\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\delta' \ldots)$$

E két Π és Π_1 polárrecziproczitás meghatároz egy polárrendszersort, melynek képződménye a felvett Γ komplexus. Minthogy pedig a $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$, terek oly projektiv térsorba tartoznak, melynek ugyanezen Γ komplexus a képződménye, a Σ'' a Σ_2-höz is polárrecziprok és e kettőből alakult Π_2 polárrendszer beletartozik az említett polárrendszer-sorba. De a Σ_2-höz sorozott $A_1B_1C_1D_1$ tetraédernek Σ-ban $A'B'C'D'$, ennek pedig Σ''-ben $\alpha\beta\gamma\delta$ tetraéder felelvén meg, látjuk, hogy a Π_2 polárrendszerben az $A_1B_1C_1D_1$ és az $\alpha\beta\gamma\delta$, azaz $ABCD$ tetraéderek egymásnak megfelelőek. Tehát Π_2 azonos azon polárrendszerrel, mely az

$$(ABCDD_1 \ldots) \barwedge (\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\delta \ldots)$$

képlettel van meghatározva.

Más szóval e három hiperbolikus viszonyban levő tetraéder meghatározta polárrendszer-sor képződménye a felvett Γ komplexus.

Tehát valóban lehetséges, hogy a három tetraéderrel együtt adott hiperbolikus sugársor minden eleme beletartozik ama sugárkomplexusba, mely ugyane tetraéderek által meghatározott polárrendszer-sor képződménye.

9. *A K_{III} és K_I sugárkongruencziák a különös esetben.* — A G felületnek a $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots$ polárrendszerekben megfelelő felületek

érintik a főtetraéder lapjait, tehát a G komplexussugár-sornak e polárrendszerekben $F, F_1, F_2, \ldots$ komplexussugár-sorok felelnek meg.

Ezt még a főtetraédertől függetlenül is kimutathatjuk. A G sugársor a Σ és Σ_1 tér két megfelelő elsőrendű u' és u'_1 siksorának képződménye. Az u' siksornak feleljen meg a Π polárrendszerben u_1 pontsor, de akkor e pontsornak, mint a Σ' alakzatának a Π_1 polárrendszerben u'_1 felel meg, más szóval az u_1 pontjai a G komplexussugár-sor elemeihez többszörösen konjugáltak. Ebből következik, hogy a G sugársornak a Π, Π_1, Π_2, polárrendszerekben megfelelő sugársorok ezen u_1 pontsorhoz perspektivek, vagyis az F-fel jelölt komplexussugár-sorok közé tartoznak.

Minthogy a G felület a főpontokat tartalmazza, a polárrendszerekben neki megfelelő $F, F_1, F_2, \ldots$ egymáshoz projektiv felületeknek a fősíkok megfelelöen közös síkjaik.

Ezek alapján kimondhatjuk, hogy a G felület pontjaihoz többszörösen konjugált III-as sugarak kongruencziája a négy fősik egyeneseiből és a komplex azon sugaraiból áll, melyek az u_1 egyenest metszik.

A tér egy tetszőleges u_1 egyenesét metsző komplexus-sugarak pedig egy másodrendű és másodosztályú sugárkongruencziát alkotnak. Ugyanis a tér tetszőleges pontjának komplexus-kúpján két alkotó van, mely ezen egyenest metszi, és a tér tetszőleges síkjának komplex-görbéjéhez az u_1-gyel való metszéspontból két érintő vonható.

Ezen másod-rendű és másod-osztályú kongruencziának szinguláris pontjai az u_1 minden pontja és a főpontok, szinguláris síkjai pedig az u_1 síkjai.

Tehát a K_{III} kongruenczia e különös esetben szétesett négy nulladrendű, első osztályú és egy másodrendű, másodosztályú kongruencziára.

A P, Q, R, S pontok, azaz a három tetraéder megfelelő oldalsikjainak közös pontjai *az* u_1 *egyenesen vannak.*

A T, U, V, Z pontok, minthogy a t', u', v', z' egyenesek a főpontokon áthaladó vezérvonalai a G-nek, az u_1 egyenesnek a λ, μ, ν, o

fősíkokkal való metszéspontja. Ezeknek komplexus-kúpjuk két elsőrendű sugársorra bomlik, egyiknek síkja fősík, míg a másiknak síkja a szemben eső főponton halad át; az előbbiek az illető főponthoz, az utóbbiak e vezérvonalak többi pontjaihoz vannak többszörösen konjugálva.

A G komplexussugár-sornak a Π, Π_1, Π_2,... polárrendszerekben megfelelő l-es sugarak kongruencziája az u_1-et metsző komplexus-sugarak másodrendű kongruencziájából és négy sík összes egyeneseiből áll.

T. i. a Π, Π_1, Π_2,... polárrendszerekben komplexus-sugaraknak általában komplexus-sugarak felelnek meg, kivételt képeznek azon elfajult polárrendszerek, melyeknek dupla pontjai a főpontok, alapfelületük pedig kúp.

Vegyük pl. az L dupla ponttal biró polárrendszert. A G sugársornak megfelelőjét e polárrendszerben úgy kapom, hogy L-ből projicziálom e sugársort és az így nyert t' elsőrendű síksor elemeihez keresem a polárisokat az L pontbeli polárrendszerben. Ezek elsőrendű sugársort alkotnak, mely a G komplexsugársor elemeihez többszörösen konjugált pontokat, tehát az u_1 pontsort projicziálja.

Az LT egyenes megfelel a G azon sugarának, mely az L-ben van. Ennek azonban e polárrendszerben a tér mindazon egyenesei is megfelelnek, melyek e sugárnak az L pontbeli polárrendszerre vonatkozólag megfelelő síkban vannak. E sík LT egyenest is tartalmazván, az u_1 egyenest T pontban metszi.

Minden főpontban van egy ily sík, melynek minden sugara l-es sugár.

Tehát valóban a K_l kongruenczia is szétesik négy nulladrendű, elsőosztályú és egy másodrendű másodosztályú kongruencziára.

10. *A különös eset összefoglaló leirása.* — Az előzőkben a Γ komplexből kiindulva vizsgáltuk e különös esetet, de attól függetlenül is fogalmazhatjuk a nyert eredményeket.

Ama harmadrendű görbék, melyeknek közös húrjai egy hiperbolikus másodrendű felület egyik alkotó sorát alkotják s e mellett a felület négy pontját — melyek páronkint képzetesek is lehetnek —

közösen tartalmazzák, egy egyszerűen végtelen sokaságot, a harmadrendű térgörbék egy sorát képezik. A hiperbolikus másodrendű felület másik alkotó-sora e görbék mindenikéhez perspektiv; ha tehát bármely kettőt, mint pontsort, olykép vonatkoztatok egymásra, hogy megfelelőknek veszem azokat a pontokat, melyek e második alkotó-sor ugyanazon elemén vannak, akkor a görbék projektiv vonatkozásba vannak hozva olykép, hogy mindenik közös pontjuk önmagának felel meg.

Tekintetbe véve már most, hogy a projektiv harmadrendű görbék mindig két projektiv tér homolog alakzatainak tekintendők, a mely terek projektivitását e görbék teljesen meghatározzák, eredményeinket következőleg foglalhatjuk össze:

Ha három tetraéder $A'B'C'D'$, $ABCD$ és $A_1B_1C_1$ ₁, melyek közös szögponttal nem birnak, oly helyzetű, hogy

1) *megfelelő szögpontjaik egy-egy egyenesen vannak,*

2) *e négy p', q', r', s' sugár pedig egy G hiperbolikus sugársorba tartozik,*

3) *mindenik tetraéder szögpontjain áthalad egy-egy harmadrendű térgörbe, melyeknek közös húrjaik a G vezérvonalai és a melyek négy közös ponttal birnak;*

úgy:

a) *e tetraéderek által páronkint meghatározott polárrendszerek képződménye egy Γ másodrendű és másodosztályú sugárkomplexus, melybe a G sugársor minden eleme beletartozik;*

b) *a három tetraéder megfelelő síkjainak metszéspontjai egy u_1 egyenesen vannak;*

c) *ezen u_1 egyenes közös vezérvonala azon három hiperbolikus sugársornak, melybe két-két tetraéder megfelelő oldalsíkjainak metszésvonalai tartoznak;*

d) *e hiperbolikus sugársorok beletartoznak a Γ komplexusnak az u_1 egyenest metsző sugaraiból alakult másodrendű és másodosztályú sugárkongruencziába.*

*

A szives olvasó meg fogja engedni, hogy czikkemet egy kérdéssel fejezzem be:

Hogyan módosulnak eredményeink, ha a három tetraéder nem hiperbolikus, hanem kétszögös, vagy perspektiv viszonyban van egymással?

Skopál István.

EGYSZERŰ ELJÁRÁS A HŐVILLAMOS ELEMEK SEMLEGES (NEUTRALIS) PONTJAINAK MEGFIGYELÉSÉRE.

Ismert dolog, hogy egy adott hővillamos elem elektromotorius ereje a két forrasztási hely hőmérsékleti különbségétől függ, és ezzel bizonyos határig növekedik. Ha az egyik forrasztási helyet állandóan az olvadó jég hőmérsékletén tartjuk és a másikat hevítjük, akkor a temperatura emelkedésével bizonyos határig növekedik az elektromotorius erő, de az egyenlő temperaturakülönbségnek, pl. 1°-nak, megfelelő elektromotorius erő a legtöbb esetben csökken, és egy bizonyos hőmérsékleti különbségnél a hővillamos áram és a megfelelő elektromotorius erő legnagyobb értékét éri el, azon túl folyton kisebbedik és egy bizonyos hőmérsékleti különbségnél zéróra esik, a melyen túl az áram iránya megfordul, azaz ellenkezőre változik.

Ha a közönségesen használt hővillamos elemekre nézve az elektromotorius erő (E) kisérleti képletében Avenarius szerint csak a második hatványú tagot veszszük fel és a forrasztási helyek hőmérsékleteit t_1, t_2-vel jelöljük, akkor

$$E = a\,(t_1 - t_2) + b\,(t_1^2 - t_2^2), \qquad 1)$$

vagy

$$E = (t_1 - t_2)\,[a + b\,(t_1 + t_2)].$$

Ebből következik, 1. hogy

$$E = 0, \quad \text{ha} \quad t_1 + t_2 = -\frac{a}{b},$$

2. hogy E akkor éri el legnagyobb értékét, ha

$$t_1 - t_2 = -\frac{a}{2b},$$

vagy ha a forrasztási helyek azon temperaturáit, melyeknél $E=0$, t_1 és t_2-vel, az elektromotorius erő legnagyobb értékének megfelelő temperaturakülönbséget pedig röviden T-vel jelöljük, akkor

$$t_1 + t_2 = -\frac{a}{b},$$

és

$$T = -\frac{a}{2b},$$

tehát

$$T = \frac{t_1 + t_2}{2}. \qquad 2)$$

Abban az esetben, a mikor az egyik forrasztási helyet 0°-on tartjuk, $T = \frac{t}{2}$, vagyis a másik forrasztási hely azon hőmérsékletének felével, a melynél a hővillamos áram ismét eltűnik. Ez esetben az E kifejezése egyszerűbb lesz, t. i.

$$E = at_2 + bt_2^2 \qquad 3)$$

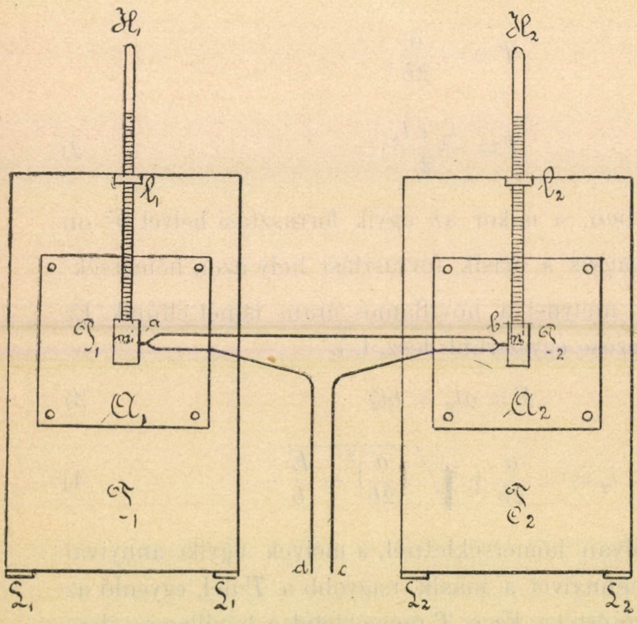
a honnan

$$t_2 = -\frac{a}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 - \frac{E}{b}}. \qquad 4)$$

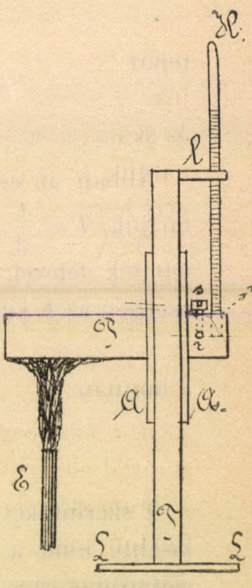
E szerint két olyan hőmérsékletnél, a melyek egyike annyival kisebb, mint a mennyivel a másik nagyobb a T-nél, egyenlő az elektromotorius erő értéke. Ezen T mérsékletet a hővillamos elem *semleges pontjának* vagy mérsékletének nevezik. Meghatározása a 2) egyenlet alapján történik. E végett a forrasztási helyek hőmérsékleteit addig változtatjuk, míg az áram eltűnik. E két hőmérséklet számtani középértéke adja a neutralis temperaturát.

Megfigyelésére különböző kisérleti eljárást alkalmaztak. A következő általam alkalmazott eljárás különösen ott, a hol a semleges pontot egy egész auditoriumnak akarjuk bemutatni, egyszerűsége miatt ajánlható.

Függőleges állású deszkadarab T, (1. és 2. ábra) tartó gyanánt szolgál, melynek közepén négyszögletes nyilás van kivágva, a két oldalához pedig vastag asbesttáblák, *a*, *a* vannak erősítve. Ezeknek közepén szintén négyszögletes nyílások vannak kivágva, melyeken keresztül egy négyoldalú aczélprizma *P* van dugva. A prizma egyik végén két fúrás van közel egymás mellett; az egyik *n* függőleges irányú, ez egy hőmérő, *H* edényének felvételére szolgál, a másik fúrás vízszintes irányú és keresztülmegy a hasáb szélességén, ez a megvizsgálandó thermoelem egyik forrasztási helyének



1. ábra.



2. ábra.

felvételére való. A beillesztett forrasztási hely *s* csavarral szorítható a *P* hasábhoz a szükséges jó fémi érintkezés végett. Egy a tartóhoz erősített falécz *l*, egy nyílással van ellátva, melyen a hőmérő megy keresztül. Az egész tartó két vaslemezen *L*, *L* nyugszik. Ily módon felszerelt tartó kettő szükséges a kisérlethez, T_1 és T_2 (1. ábra).

A hővillamos elemek *dabc*, fémhuzalokból vagy fémlemezekből készülnek. Mindegyik három részből áll, *ad* és *bc* részek ugyan-abból a fémből valók, a harmadik rész *ab*, más fémből áll, mely a másik kettővel *a* és *b*-nél össze van forrasztva. A forrasztási helyeket *a*, *b*, mint a rajzból kivehető, a két vasprizma *r* nyilásaiba illesztjük és *s* csavar meghuzása által a hővezetéshez kivánt fémi érintkezést a hasábbal helyreállítjuk.

Kisérletezés előtt a hőmérők számára fúrt lyukakba finom rézport teszünk és azután *l* léczen keresztül a hőmérőket beállítjuk. Azután a hővillamos elem *d* és *c* végeit kapcsoló csavarok segélyével összekötjük a galvanometerhez vezető rézhuzalokkal és azután nullafokú vízbe mártjuk. Az aczélhasábok másik végei alá pedig Bunsen égetőket *E* állítunk és a hasábokat hevíteni kezdjük. A meginduló thermoáramot tükörgalvanometerrel, távcsővel és skálával figyeljük meg. Demonstratiókhoz áttetsző skálát használunk, melyre egy alkalmas fényforrástól eredő és a tükrön visszavert fénynyaláb esik.

Ha a kisérletnél csak az egyik forrasztási helyet hevítjük, a másikat pedig állandóan a levegő hőmérsékletén tartjuk, akkor a temperatura emelkedésével növekedik a thermoáram intensitása és a megfelelő elektromotorius erő értéke, de az egyenlő temperaturakülönbségnek megfelelő növekedések nem egyenlők, hanem folyton kisebbedők, míg a hővillamos elem egy bizonyos temperaturánál elektromotorius ereje legnagyobb értékét elérte. Ezen túl a hőmérsék még további emelkedésénél az elektromotorius erő folyton kisebbedik és egy bizonyos temperaturánál zéróra leszáll, a thermoáram eltűnik és azon túl iránya változik.

Mindezek a változások a következő táblázatos összeállításból vehetők ki, mely egy sárgaréz-ólom hővillamos elemmel végzett kisérleti sor eredményeit foglalja magában. A táblázatban t_1 és t_2 a forrasztási helyek hőmérsékleteit, *I* az áramnak skálarészekben kifejezett intensitását jelentik. Az utolsó rovatban a 10°-nyi temperaturaemelkedésnek megfelelő növekedése az áramintensitásnak áll.

A kisérlethez egy astatikus tűrendszerrel ellátott érzékeny tükörgalvanometer es egy olyan transparens skála használtatott, melynek egyes skálarészei 20 mm hosszúak. A galvanometer lengés ideje 7 másodpercz volt. Az egyik forrasztási hely a levegő temperaturáján (t_2) marad. A felső részében sűrített hydrogengázt tartalmazó hőmérők skálái 500° C.-ig terjednek.

I. *Egy sárgaréz-ólom elem thermoelektromos viselkedése.*

t_1	t_2	I	Növ.	t_1	t_2	I	Növ.
18·0	18·5	—0·4	0·0	110	19·5	1·4	0
20·0	18·5	—0·2	0·2	120	19·5	1·4	0
30·0	18·5	0·3	0·5	130	19·5	1·24	—0·16
40·0	19·0	0·6	0·3	140	19·5	1·1	—0·14
50·0	19·0	0·8	0·2	150	19·5	1·0	—0·1
60·0	19·0	1·0	0·2	160	19·5	0·9	—0·1
70·0	19·0	1·2	0·2	170	20	0·7	—0·2
80·0	19·0	1·3	0·1	180	20	0·5	—0·2
90·0	19·0	1·35	0·05	190	20	0·3	—0·2
100·0	19·5	1·4	0·05	200	20	0·0	—0·3
				210	20	—0·4	—0·4

E szerint ezen elem elektromotorius erejének legnagyobb értékét (1·4) 80·5 és 100·5° hőmérsékleti különbségek közt érte el. Semleges pontja pedig körülbelül (200+20) : 2 = 110°-nál fekszik. Az áramerő kezdetben jobban, azután mind kevésbé növekedik, és a legnagyobb érték közelében alig változik a hőmérsék emelkedésénél. A legnagyobb értéket elérve eleinte lassabban, azután mind jobban csökken az áramerő, míg zéróra esik és az áram azután megfordul.

A neutralis pont pontosabb meghatározása végett mind a két vashasábot hevítettem és a lángokat addig változtattam, míg az áramerő zéró lett. Az ekkor leolvasott temperaturák és a belőlük kiszámított neutralis temperatura a következő kis táblázatban foglaltatnak:

II.	t_1	t_2	I	t_1+t_2	T
	163°	65°	0	228°	114°
	186	46	0	232	116
	190	44	0	234	117
	191	43	0	234	117
	193	41	0	234	117
	150	84	0	234	117

Az utolsó négy megfigyelés szerint ezen hővillamos elem semleges pontjának hőmérséklete *117°* C. Az áram az ólomtól a sárgaréz felé folyik.

Subjectiv megfigyeléseknél millimeteres skálával nagyobb pontosság érhető el, mint ezzel az előadásoknál használt skálával.

Egy vas-ezüst elemmel dr. Pfeiffer Péter tanársegéd úrral együtt két kisérleti sort végeztem, az egyiknél csak az egyik forrasztási helyet, a másiknál mind a kettőt hevítettem. Egyikünk a hőmérőket, a másik a transparens skálán a fénymutató eltérését figyelte meg. A megfigyelt eredményeket a következő két táblázatban közlöm, melyekben t a hevített forrasztási hely hőmérsékét, I az áramerőt skálarészekben és N az utóbbinak növekedését jelenti.

I. Egy vas-ezüst elem áramereje különböző hőmérséknél, ha csak az egyik forrasztási helyet hevítettük, a másikat a levegő temperaturáján (20° C) hagytuk. Az áramkörben 20 Ω ellenállás volt beiktatva. A megfigyelés 5 fokonkint történt.

t	I	N	t	I	N	t	I	N
20°	0·8	0	115°	8·3	0·2	215°	11·55	0·1
25	2·0	1·2	125	8·8	0·5	220	11·60	0·05
30	2·7	0·7	130	9·0	0·2	225	11·70	0·10
35	3·2	0·5	135	9·2	0·2	230	11·75	0·05
40	3·7	0·5	140	9·4	0·2	235	11·75	0·00
45	4·1	0·4	145	9·6	0·2	240	11·80	0·05
50	4·5	0·4	150	9·7	0·1	245	11·90	0·10
55	4·9	0·4	155	9·9	0·2	250	12·00	0·10
60	5·2	0·3	160	10·1	0·2	255	12·00	0·00
65	5·6	0·4	165	10·3	0·2	260	12·05	0·05
70	6·0	0·4	170	10·4	0·1	265	12·10	0·05
75	6·2	0·2	175	10·6	0·2	270	12·10	0·00
80	6·5	0·3	180	10·7	0·1	275	12·10	0·00
85	6·8	0·3	185	10·85	0·15	280	12·05	—0·05
90	7·1	0·3	190	11·00	0·15	285	12·03	—0·02
95	7·4	0·3	195	11·10	0·10	290	12·01	—0·02
100	7·7	0·3	200	11·25	0·15	295	12·00	—0·01
105	7·9	0·2	205	11·35	0·10	300	11·99	—0·01
110	8·1	0·2	210	11·45	0·10			

Itt is az áram intensitásának növekedése kezdetben nagyobb, azután folyton kisebbedő és a maximum körül alig észrevehető. Legnagyobb értékét (12·1 sk. r.) 270° C. körül érte el. Ezen túl csökken eleinte lassabban, azután gyorsabban. A hőmérő, melyet ezen thermoelemnél alkalmaztam, csak 300° C.-ig terjedett, azért itt meg kellett szakitani a kisérletet.

A neutralis temperatura pontosabb meghatározása czéljából tett kisérleteknél mind a két hasábot, illetve forrasztási helyet hevitettük, a két hevitő lángot addig szabályozva, míg a fénymutató a skála zérópontjára — a galvanometertű a mágneses meridiánba — visszatért. A talált eredmények a következők:

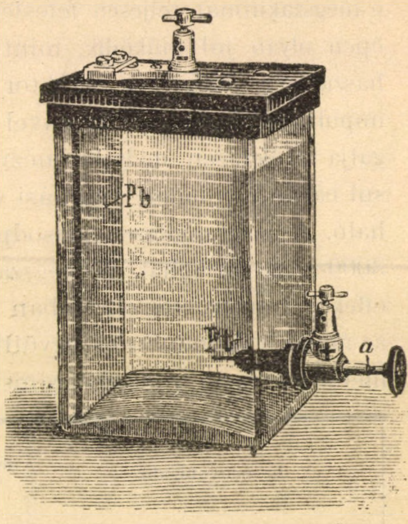
II. t_1	t_2	t_1+t_2	T
292°	263°	555°	277·5°
290	264	554	277·0
287	265	552	276·0
			k. é. 276·8° C.

Ezen eredményeknél a kiálló higanyszál miatt szükséges javítások még nincsenek tekintetbe véve.

Abt Antal.

AZ ELEKTROLYTIKUS MEGSZAKÍTÓ MŰKÖDÉSÉNEK ELVE.

WEHNELT elektrolytikus megszakítójánál azon már régebben felismert sajátos fény- és hőtüneménynyel járó áramingadozásokat használta fel, melyek higított kénsavat tartalmazó elektrolytikus czellánál fellépnek, ha annak egyik elektródja a másikhoz képest rendkívül kicsiny felületű, pl. nagy ólomlappal szemben rövid platindrót. Az ilyen czella (1. ábra) különösen nagyon szapora, s tökéletes megszakításokat hoz létre, ha annak kis felületű elektródját anódul választva, az áramkörbe még egy önindukcziós tekercset kapcsolunk. Mint ilyen induktorok primär áramkörébe kapcsolva, kiváló megszakító gyanánt bizonyult, mely rendkívüli nagy frequentia, s indukcziós hatás tekintetében az eddigi leghatásosabban működő motoros és turbinás megszakítókat is felülmulja.



1. ábra.

A. WEHNELT [1] és P. SPIES,[2] továbbá TH. SIMON,[3] E. RUHMER,[4] s

[1] A. WEHNELT, Elektrotechn. Zeitsch. H. 4. 1899. Wied. Ann. B. 68. p. 233. 1899.

[2] P. SPIES und A. WEHNELT, Verhandl. d. deutsch. physik. Gesellschaft. 1. p. 53. 1899.

[3] TH. SIMON, Wied. Ann. B. 68. p. 273 és 860. 1899.

[4] E. RUHMER, Elektrotechn. Zeitsch. H. 26. és H. 45. 1899.

mások gondos és beható kisérleteik alapján kimutatták ezen új megszakító tulajdonságait, főleg pedig azon tényezők befolyását, melyektől a megszakítások létrejövetele s azok szaporasága függ, miket röviden a következőkben foglalhatunk össze:

A WEHNELT-féle elektrolytikus megszakító csakis akkor működik tartósan és szabatosan, ha a platindrót anód, s az áramkör számbavehető önindukczióval bír; azonkívül, hogy működésbe jöjjön, szükséges, hogy az áramforrás feszültsége bizonyos határértéknél (12—25 volt) nagyobb legyen, mely határérték annál kisebb, minél nagyobb az áramkör önindukcziója. Az induktor kondenzátora e megszakítónál teljesen feleslegessé válik és váltakozó árammal épen olyan jól működik, mint egyenárammal. Váltakozó áram használata mellett az induktor secundär tekercsében a szikraimpulzusok egyirányuak, mivel csakis azon áramfázisokat szakgatja tökéletesen, melyekre nézve a platincsúcs anód. Áramforrásul bármely villamos világítási vezeték (átlag 110 volt) felhasználható. A megszakítások másodperczenkénti száma egész 2000—3000-ig is felrúghat. A megszakítások szaporasága, valamint az effektiv áramerősség elsősorban függ az áramforrás feszültségétől, az áramkör önindukcziós együtthatójától, a platindrót felületétől, illetőleg az azon uralkodó áramsűrűségtől. Nevezetesen

ha nagyobbodik	A megszakitások mp.-kénti száma	Az effektiv áramerősség	Az áramsürüség
1. Feszültség	nagyobb	nagyobb	nagyobb
2. Önindukcziós együttható	kisebb	kisebb	kisebb
3. Anód felülete	kisebb	nagyobb	kisebb

Az áramerősségének és feszültségének mérésére a megszakítások szaporasága miatt a galvanometrikus mérőeszközök nem használhatók. E czélból oly mérőeszközöket kell választanunk, melyeknek adatait az áramnak periodikus változásai nem befolyásolják, a milyenek pl. a HARTMANN és BRAUN-féle kalorikus árammérők, a hevülődrót ampèrmeter, illetőleg voltmeter, melyek a lemért áramerősségnek és feszültségnek mindég effektiv értékét adják:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}\,; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2 dt}. \qquad 1)$$

A WEHNELT-féle elektrolytikus czellában fellépő megszakítások magyarázatát WEHNELT és SPIES * először abban keresték, hogy itt hasonló jelenségekkel van dolgunk, minőt polározott elektródok periodikusan váltakozó áramkörben mutatnak. A polározott elektródok u. i. ez esetben nagy kapaczitású kondenzátorokéhoz hasonló magatartást tanusítanak, és e szerint a platin anód C kapaczitású poláros kondenzátor szerepét játszva az áramkör L önindukcziójával oly elektromos oscillatiókat képező rendszert alkot, melynek rezgésideje:

$$T = \pi \sqrt{LC}. \qquad 2)$$

WEHNELT és SPIES-nek ezen feltevésére elsősorban azon körülmény szolgált alapul, hogy az elektrolytikus megszakító a vezeték önindukczióját teljesen lerontani látszik, továbbá, hogy a megszakító kapcsain az áramforrás feszültségének két-, sőt többszöröse észlelhető, a melyhez hasonló jelenséggel találkozunk a váltakozó áramok rezonancziájának esetében, midőn t. i. a C kapaczitású és L önindukcziós vezeték oscillátioinak rezgésszáma egyenlő a váltakozó áram félperiodusával.

E magyarázat azonban sem nem valószinű, sem össze nem egyeztethető a megszakításokat kisérő egyéb jelenségekkel, azért csakhamar maga WEHNELT is más okokban kereste a megszakítások létrejöttét.

A WEHNELT-féle megszakító kapcsai között fellépő feszültségnagyobbodás bármely szabatosan s elég szaporán működő megszakítónál egyformán észrevehető, s azt a megszakításbeli különáram hatásának kell tulajdonítanunk. A megszakító elektródjain fejlődő gázok pontos analiziséből kiderült, hogy míg a kathodon mindig a FARADAY törvénynek megfelelő térfogatú tiszta hydrogén fejlődik, addig az anód-dróton fejlődő gázok térfogata lényegesen

* WEHNELT und SPIES. i. h.

nagyobb a FARADAY törvény által megszabott térfogatnál, s maga a gáz *hydrogén*, oxygén s ozonnak robbanó keverékéből áll. E térfogateltérés, valamint a hydrogén és oxygénkeverék viszonya tág határok között változik, s függ az áramkör önindukcziójától. Általában a térfogateltérés annál nagyobb, s a gázkeverék annál robbanóbb természetű, illetőleg nagyobbrészt durranó gázból áll, minél nagyobb az áramkör önindukcziója. Ha a megszakítások csakugyan az oscillálás jellegével birnának, vagy legalább is a megszakítás után bizonyos mennyiségű elektromosság visszaáramlásával lenne dolgunk, akkor a kathodon épen úgy kellene hydrogén és oxygén keverékének kiválnia, mint a csúcsos anódon. A BRAUN-féle vakuumcsővel vizsgált áramgörbék alakja is kizárja az áramnak váltakozó jellegű ingadozásait. Hogy a megszakítások létrehozásában magának az elektrolysisnek sem lehet lényeges szerepe, kiviláglik azon tényből, hogy a megszakítások beállanak polározatlan elektródok esetében is (rézanód rézsulfatoldatban); sőt az elektrolytikus czellának olynemű módositásainál is, hol az elektródok pusztán csak a vezetés szerepét játszák, a mint azt WEHNELT-nek módositott alakú czelláinál, különösen pedig a CALDWELL, valamint a SIMON által szerkeztett folyadékmegszakítóknál tapasztalhatjuk.

Sokkal valószinübb, s a megszakításokat kisérő karakterisztikus jelenségekkel tökéletesebb összhangzásban van azon magyarázat, mely a megszakitások okát mechanikai és hőhatásokban keresi. WEHNELT egy újabb értekezésében [1] már ez úton igyekszik a megszakítások létesülésére nézve elfogadhatóbb magyarázatot adni, melyet ugyanazon elv alapján SIMON,[2] továbbá VOLLER és WALTER [3] egészitettek ki.

A zárás pillanatától növekedő áram a platindrótot körülvevő, rendkívüli mértékben összeszűkitett elektrolyt felületén, annak viszonylagosan nagy ellenállása következtében, meleggé alakul,

---

[1] WEHNELT, Wied. Ann. i. h.
[2] SIMON i. h.
[3] VOLLER und WALTER, Wied. Ann. B. *68*. p. 526. 1899.

mely az áramerősséggel növekedve oly magas fokra emelkedik, hogy azon a helyen a folyadék forrásnak indul, s a platindrót körül vízgőzburok képződik. E gőzburok, mely valószínűleg az elektrolysis útján kiválasztott oxygén által is szaporíttatik, az áram útját megszakítja; e pillanatban a vezeték önindukcziója következtében támadt megszakításbeli külön áram a vízgőzburkot alkotó elemeire szétbontja, s az egészben vagy részben durranó gázzá alakult gőzburkot fénytünemény kiséretében robbanásszerűleg szétveti. A szétesett gázbuborékok a folyadékban kondenzálódnak; az érintkezés a folyadék és platindrót között újra helyre áll, s az előbbi folyamat ismétlődik.

A platindrót körül keletkezett gőzképződésre vall a megszakításokat kisérő, a víz forrására emlékeztető sistergő hang, valamint az elektrolyt mérsékletének, s az arra ható nyomásnak befolyása a megszakítások szaporaságára. Ruhmer kisérletei igazolják, hogy mindazon külső körülmények, melyek a gőzburok keletkezését elősegitik, mint az elektrolyt mérsékletének emelése, vagy a nyomás csökkentése, egyúttal növelik a megszakítások szaporaságát. Mihelyt azonban az elektrolyt forráspontjának mérsékletéhez közeledik, a megszakító működése, mindjobban szabálytalanabbá válik, végre meg is szűnik, minthogy ez esetben a megszakításokat okozó gőzburoknak gyors kondenzálásához szükséges feltételek hiányzanak.

A megszakításbeli külön áram szikrája, mely a fémes érintkezésű megszakítóknál zavaró szerepet játszik, mit alkalmas kondenzátor bekapcsolásával kell kompenzálnunk, a Wehnelt-féle megszakítónál épen hasznos tevékenységet fejt ki, a mennyiben a platindróton képződött vízgőzburok kémiai szétbontását s ezt gyorsan követő robbanásszerű szétesését eszközli, minek következtében újból áramzárás jön létre. A megszakítási helyen a vízgőzburoknak lokális szétbontását nyilvánvalóvá teszi az ott fellépő anomális elektrolysis; azonban még nyilt kérdés, vajjon e szétbontást a külön áram direkt elektrolysisének, vagy az erős hőképződés következtében létesült kémiai dissociatiónak tulajdonítsuk-e?

Önindukcziós tekercs nélküli áramkörben valószínűleg a megszakításbeli külön áram hiányának kell tulajdonítanunk, hogy a megszakító működésbe nem jön, mert nyilván a platindrót körül képződött gőzburok leválasztása nem következik be, sőt lassanként az izzásba jövő drót által még fentartatik.

E magyarázatot elfogadva, a Joule törvénye alapján az áramkör ellenállása (R), önindukcziós együtthatója (L), s az áramforrás feszültsége, másrészről a megszakítás periodusa, s az effektiv áramerősség közötti összefüggés oly mathematikai egyenlettel fejezhető ki,* mely a kisérleti úton meghatározott eredményekkel tökéletes összhangzásban van.

A megszakítás periodusában két fázist kell megkülönböztetnünk: az egyik a zárás pillanatától az áram megszakításáig eltelt időköz T_1; a másik azon időköz T_2, mely alatt az elektrolyt, s a platindrót közötti érintkezés ismét helyre áll. A megszakítás teljes periodusa tehát:

$$T = T_1 + T_2. \tag{3}$$

A T_1 időköz alatt L önindukcziós és R ellenállású áramkörben növekedő áramerősséget, mint az idő függvényét a következő ismert egyenlet fejezi ki:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = f(t). \tag{4}$$

Az áramkör ellenállásának túlnyomó részét a platindrótot körülzáró, rendkivüli mértékben összeszűkitett folyadékfelület képezi, úgy hogy ez utóbbinak ellenállása mellett az áramkör többi része elhanyagolható. Az R ellenállás e szerint a platindrót felületével fordítottan arányos:

$$R = \frac{k}{F}. \tag{5}$$

A k állandó értéke függ az elektrolyt fajlagos ellenállásától, mérsékletétől, de mindenesetre feltehető, hogy átlagos értéke ugyanazon megszakítónál állandó.

A megszakítóval végzett kisérletek azt igazolták, hogy a meg-

---

* Th. Simon i. h.

szakitó egyébként változatlan körülmények között a kalorikus úton lemért effektiv áramerősségnek (1) alatti egyenlet) ugyanazon értéke mellett a megszakításoknak mindég ugyanazon szaporaságát adja, vagyis az egyes megszakításokra az árammunkának mindig ugyanazon értékét használja fel. Az idő függvényében kifejezett áramerősség (4. egyenlet) tehát addig növekszik, míg az összeszűkitett folyadék felületén a megszakitás létrehozásához szükséges és meghatározott értékű meleget (C) nem fejleszti. Ezen időköz alatt fejlődő árammeleg értéke:

$$C = 0{\cdot}24 \int_0^{T_1} i^2 R dt. \qquad 6)$$

A C melegmennyiség értéke az időn kívül általában komplikált függvénye az elektrolyt mérsékletének, fajmelegének, párolgási hőjének, hővezetési együtthatójának, továbbá az anód tömegének, fajmelegének, az anódon fellépő elektrolysisnek stb; a megszakítónak változatlan állapota mellett azonban az előbbiek szerint állandó értéknek kell tekintenünk.

Helyettesitsük a 6) alatti egyenletbe i^2-nek t függvényében kifejezett értékét:

$$C = 0{\cdot}24 \int_0^{T_1} \frac{E^2}{R^2} (1 - 2e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{2R}{L}t}) R dt \qquad 7)$$

$$= 0{\cdot}24 \frac{E^2}{R} \left\{ \int_0^{T_1} dt - 2 \int_0^{T_1} e^{-\frac{R}{L}t} dt + \int_0^{T_1} e^{-\frac{2R}{L}t} dt \right\}$$

Az intregálást végrehajtván:

$$C = 0{\cdot}24 \frac{E^2}{R} \left\{ t + 2\frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{L}{2R} e^{-\frac{2R}{L}t} \right\}_0^{T_1}$$

$$= 0{\cdot}24 \frac{E^2}{R} \left\{ T_1 + 2\frac{L}{R} e^{-\frac{RT_1}{L}} - \frac{L}{2R} e^{-\frac{2RT_1}{L}} - 2\frac{L}{R} + \frac{L}{2R} \right\}$$

$$= 0{\cdot}24 \frac{E^2}{R} \left\{ T_1 - \frac{2L}{R} (1 - e^{-\frac{RT_1}{L}}) + \frac{L}{2R} (1 - e^{-\frac{2RT_1}{L}}) \right\}. \qquad 8)$$

A $t = \frac{L}{R}$, az ú. n. időkonstans, melyre nézve az $e^{-\frac{R}{L}t}$ és

$e^{-\frac{2R}{L}t}$ kifejezés $\frac{1}{e} = 0{\cdot}368$, illetőleg $\frac{1}{e^2} = 0{\cdot}135$, a gyakorlatban általában igen kicsiny szám, úgy hogy értékét a T_1 időköz sokszorosan (5—10-szer) mulja felül, következőleg e-nek fenti hatványai $t = T_1$-re nézve az egység mellett elhanyagolható kicsiny törtek. Ennek folytán a 8) alatti egyenlet a következő alakban írható :

$$C = 0{\cdot}24\frac{E^2}{R}\left(T_1 - \frac{2L}{R} + \frac{L}{2R}\right)$$

$$C = 0{\cdot}24\frac{E^2}{R}\left(T_1 - \frac{3}{2}\frac{L}{R}\right),$$

a honnan :

$$T_1 = \frac{3}{2}\frac{L}{R} + \frac{C}{0{\cdot}24}\frac{R}{E^2},$$

vagy :

$$T_1 = \frac{3}{2}\frac{L}{R} + C_1\frac{R}{E^2}. \qquad 9)$$

A megszakítás periodusának másik része (T_2) függ azon sebességtől, melylyel az áramgátló gőzbuborék a platindrótról leválasztatik, kondenzálódik s maga a platindrót és környéke lehül. A T_2 időköz mindenesetre ismét komplikált függvénye az elektrolyt mérsékletének, fajmelegének, a platindróttól felszálló folyadék áramlásának stb., azonban ugyanazon megszakítónál és állandó mérséklet mellett állandónak tekinthető, s általában kicsiny mennyiség.

$$T_2 = C_2$$

megszakítás teljes periodusa tehát :

$$T = T_1 + T_2 = \frac{3}{2}\frac{L}{R} + C_1\frac{R}{E^2} + C_2, \qquad 10)$$

vagy az 5) alatti egyenlet tekintetbe vételével

$$T = \frac{3}{2}\frac{LF}{k} + C_1\frac{k}{E^2F} + C_2. \qquad 11)$$

Hasonló módon kifejezhető az effektiv áramerősségnek függése a fenti tényezőktől. A kalorikus úton lemért effektiv áramerősség, azaz egy oly állandó áram erősségének értéke, mely ugyanazon idő alatt épen annyi árammeleget fejleszt, mint a megmért változó értékű áram:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T_1} i^2 dt}, \qquad 12)$$

mivel az áram a T periodus alatt csakis T_1 ideig tart.

Helyettesitsük be az i^2 értékét az idő függvényében kifejezve:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T_1} \frac{E^2}{R^2}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})^2 dt.}$$

Az integrálást elvégezvén, a 8) alatti egyenletnél alkalmazott rövidítések tekintetbe vételével a következő egyenletet kapjuk:

$$I = \sqrt{\frac{E^2}{R^2 T}\left(T_1 - \frac{3L}{2R}\right)}$$

T_1-nek a 9) alatti értékét behelyettesítvén:

$$I = \sqrt{\frac{C_1}{RT}}, \qquad 13)$$

a honnan egyúttal a C_1 állandó értékét közvetlen mérés útján kapjuk meg:

$$C_1 = \frac{C}{0{\cdot}24} = I^2 RT. \qquad 14)$$

A T-nek 10) alatti értékét tekintetbe vévén a 13) alatti egyenlet a következő alakban írható:

$$I = \sqrt{\frac{C_1}{R\left(\frac{3}{2}\frac{L}{R} + C_1\frac{R}{E^2} + C_2\right)}},$$

vagy

$$I = \sqrt{\frac{C_1}{\frac{3}{2}L + \frac{C_1 R^2}{E^2} + C_2 R}}, \qquad 15)$$

illetőleg $R = \frac{k}{F}$-et tévén

$$I = \sqrt{\frac{C_1}{\frac{3}{2}L + \frac{C_1 k^2}{F^2 E^2} + \frac{C_2 k}{F}}}. \tag{16}$$

A 11) és 16) alatti egyenletek világosan kifejezik, hogy a megszakitás periodusa s az effektiv áramerősség valóban oly módon függnek a feszültségtől, az önindukcziós együtthatótól, s az anód felületétől, mint azt a megszakitóval végzett kisérletekből megállapitani sikerült. A megszakitások másodperczenkénti száma a feszültség nagyobbodásával növekszik, ellenben az önindukcziós együttható nagyobbodásával csökken. Az effektiv áramerősség pedig a feszültség s az anód felületének nagyobbodásával növekszik, ellenben az önindukcziós együttható a megszakitások szaporaságának nagyobbodásával csökken.

Állandó önindukczió és ellenállás, illetőleg anódfelület mellett, ha azonkivül a folyadék mérséklete is csak kis határok között ingadozik, a 10) alatti egyenlet alapján:

$$T = \frac{1}{n} = A + \frac{B}{E^2}, \tag{17}$$

hol

$$A = \frac{3}{2}\frac{L}{R} + C_2; \quad B = C_1 R;$$

és n a megszakitások másodperczenkénti száma.

Ha pedig hasonló körülmények között a feszültség és az ellenállás, illetőleg az anód felülete állandó:

$$T = \frac{1}{n} = ML + N, \tag{18}$$

hol

$$M = \frac{3}{2R}; \quad N = C_1 \frac{R}{E^2} + C_2.$$

Állandó feszültség és önindukczió esetén:

$$T = \frac{1}{n} = P.F + \frac{Q}{F} + C_2, \tag{19}$$

hol

$$P = \frac{3}{2}\frac{L}{k}; \quad Q = \frac{C_1 k}{E^2}.$$

Minthogy $P > Q$, legalább a közölt számbeli adatokból átszámítva mindannyiszor annak találtam, a T, illetőleg az n értékére nézve mindig az egyenletnek az első tagja az irányadó.

Az R ellenállás alatt tulajdonképen csakis az anódon összeszorított folyadék ellenállását tekintettük, melynek viszonylagosan nagy értéke mellett az áramkör többi részének ellenállását elhanyagoltuk. Ha ez utóbbinak r ellenállását figyelmen kivül nem hagyhatjuk, a 10) alatti egyenletben R helyébe $R+r$-et kell tennünk:

$$T = \frac{3}{2} \frac{L}{R+r} + C_1 \frac{R+r}{E^2} + C_2$$

vagy:

$$T = \frac{3}{2} \frac{L}{\frac{k}{F} + r} + \frac{C_1\left(\frac{k}{F} + r\right)}{E^2} + C_2 .$$

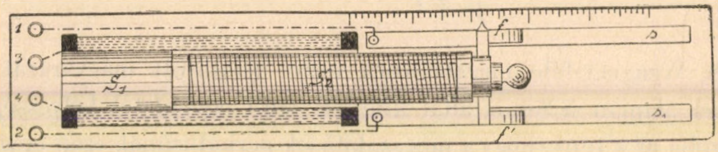
A Wehnelt-féle megszakítóra nézve felállított magyarázat, s ennek alapján a Simon által kifejtett fenti egyenletek helyességét igazolja az a tény, hogy a megszakítások periodusának ezen egyenletekből kiszámított, s egyidejüleg kisérletileg meghatározott értékei nagy pontossággal megegyeznek, mint az a Simon* és Ruhmer** által közölt összehasonlító sorozatokból világosan kitünik. Simon a 17) egyenlet alapján változó feszültségek (40—140 volt) mellett, Ruhmer pedig a 18) egyenletből az önidukcziós együtthatónak változtatása mellett határozta meg a periodusokat; a számítás s ezzel párhuzamosan kisérleti úton nyert adatok közötti eltérést 2—3%-nál sehol sem láttam nagyobbnak.

Ruhmer tekercsének önindukcziós együtthatóját tág határok között igen elmés módon variálta, a mi alatt annak ellenállása pontosan ugyanaz maradt. E czélból önindukcziós tekercsét két egymásba tolható (2. ábra) S_1 külső és S_2 belső tekercs képezte, melyek mindegyike egyenlő hosszú és vastag drótból, s egyenlő számú tekervényből áll, úgy hogy mind a két tekercsnek önindukcziós

* Th. Simon. i. h.

** E. Ruhmer. Elektrotechn. Zeitsch. H. 45. 1899.

együtthatója pontosan egyenlő. A belső tekercs a külső üregébe tetszésszerint betolható vagy abból kihúzható; a két tekercsnek egymáshoz viszonyított állását oldalt alkalmazott *mm*-es osztályzat mutatja; egyúttal *s*—*s'* rézsíneken csúszó *f*—*f'* rúgók az 1—2 kapcsokat vezetőleg kötik össze. A két tekercs az ábra baloldalán látható kapcsok útján az áramkörbe egymásután bekapcsolva úgy működik, mint egy indukcziós tekercs, melynek önindukcziós együtthatóját a kettőnek együtthatója s egymáshoz viszonyított helyzete határozza meg. Ha az áram útja az 1 . . . . 2—3 . . . . 4 kapcsokon át úgy halad, hogy mind a két tekercsét ugyanazon irányban futja körül, azoknak indukcziós hatása egymást erősíti. Legnagyobb lesz a kettős tekercs önindukcziós együtthatója, ha a külső tekercs üregébe a belső egészen be van tolva és fokozatosan kisebb, a mint az utóbbit



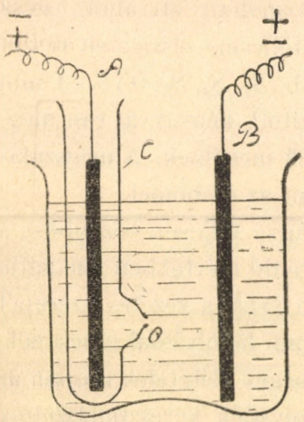
2. ábra.

kihúzzuk. Ha pedig az áram az 1 . . . . 2—4 . . . . 3 kapcsokon át haladva a két tekercset ellenkező irányban futja körül, egyiknek indukcziós hatása gyengíti a másikét; legjobban, ha a tekercsek teljesen egymásba vannak tolva és kevésbbé, a mint a belső tekercset mindjobban kihúzzuk.

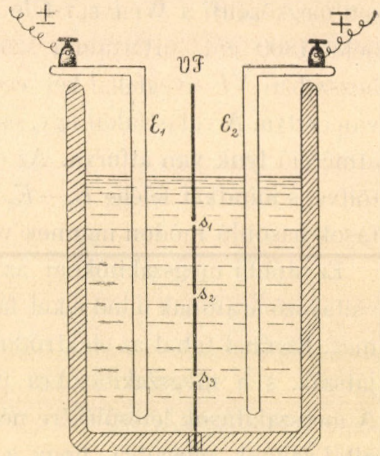
A kettős tekercs önindukcziós együtthatója tehát, egyrészt az áramnak ugyanazon, vagy ellenkező irányban való bekapcsolása, másrészt a két tekercs egymáshoz viszonyított helyzetének megváltoztatása által adott határértékek között tetszésszerint volt variálható; átlag 0·01—0·05 quadrans között. Ellenállás változásként csupán az *s*—*s'* sín hosszának változása jöhet szóba, mely vastag rézből lévén, teljesen elhanyagolható.

Hogy a megszakítások okát csakugyan az anód körüli rendkívüli mértékben összeszűkített folyadék keresztmetszetén fejlődő áram meleg-hatásában kell keresnünk, legdöntőbb bizonyítéka az a tény, hogy ugyanezen feltételeknek más úton való előidézése, az elektrolysisnek teljes kizárása mellett, hasonló áram-megszakításokat eredményez. Beigazolva látjuk ezt Wehnelt-nek a már említett módositott alakú megszakítóin, úgyszinte a Caldwell- és Simon-féle újabb szerkezetű folyadékmegszakítókon.

Wehnelt czelláinak egyik ilyen módositott alakját a 3. ábra tünteti fel. Higitott kénsavat tartalmazó üvegedénybe C kémcső merül, melynek oldala O-nál ki van fújva. A a kémcsőbe, B az üvegedénybe merülő ólomelektródok. Áramot vezetvén az elektródo-



3. ábra.



4. ábra.

kon át, az O nyilásnál nagy mértékben összeszűkitett folyadék keresztmetszetén hasonló jelenség áll elő, mint az előbb tárgyalt elektrolytikus czella platin drótján. Az összeszoritott keresztmetszetű folyadékrétegnek viszonylagosan nagy ellenállása következtében az árammeleg képződése e helyen konczentrálódik ; a forrásáig hevített vékony folyadékréteg gőzzé alakul s a keletkezett gőzbuborék az O nyilást elzárja, minek folytán az áram megszakad. A gőzbuborék ezután, mindenesetre ismét a megszakításbeli külön áram szikrájának behatása alatt, fénytünemény kiséretében szétesik, a hidegebb környezetben kondenzálódik, s az elválasztott folyadékrétegek ismét érintkezésbe jutnak. A kis nyilás két oldalán felszálló kis buborékok csaknem tiszta durranógázból állanak, a mi arról tanuskodik, hogy a nyilást elzáró vízgőzbuborék a szétesés előtt lokális szétbontást szenved.

WEHNELT ezen módositott megszakítója azonban gyakorlati czélra nem igen alkalmazható, mert nagy ellenállása miatt magas feszültségű (40—90 volt) áram mellett is csak nagyon lassan működik. A SIMON-féle folyadékmegszakító, mely csaknem teljesen megegyezik a CALDWELL-ével, e tekintetben sokkal czélszerübb berendezésű; szaporaság és gyakorlati alkalmazhatóság tekintetében pedig teljesen megközelíti a WEHNELT-féle elektrolytikus megszakítót. Körülbelől 1800 cm^3 ürtartalmú szögletes üvegedény (4. ábra), egész hosszában *VF* üvegfallal két egymástól teljesen elszigetelt részre van osztva. A válaszfalon egy, esetleg több (S_1, S_2, S_3) 0·75—1 mm átmérőjű lyuk van átfurva. Az edény higított kénsavval van megtöltve, s mindkét felébe E_1—E_2 ólomlapok merülnek. A megszakítások hasonló módon mennek végbe, mint az előbbinél.

Ez utóbbi megszakítóknál az áram iránya teljesen közönbös; a váltakozó áramnak mind e két fázisát egyenlő mértékben szakgatja meg. Ezeknél tehát az elektródok csupán csak a vezetés szerepét játszák, s a megszakításokra nézve semmi befolyással nincsenek. A megszakítások létesülésére nézve szükséges feltételek csupán az által vannak megadva, hogy a vezető folyadék keresztmetszete a kis nyilásoknál nagy mértékben összeszorul, s így az áramkörben nagy ellenállásként viselkedve az árammelegnek főleg e helyre való konczentrálását eredményezi. Mindenesetre a WEHNELT-féle eredeti elektrolytikus megszakítónál is az elektrolysis a megszakítások tulajdonképeni oka mellett mellékes szerepet játszik, és épen azért, véleményem szerint, az «elektrolytikus-megszakító» elnevezés sem lehet egészen jogosult.

Dietz Lajos.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT HETEDIK RENDES KÖZGYÜLÉSE.

Az április legelején szétküldött közgyülési meghivóra 48 tagtársunk gyült össze április 30-án d. u. 5 órakor az egyetemi fizikai intézetben. Április 11-ike, a közgyülés napjául mintegy önként ajánlkozó nemzeti ünnep, az idén a husvéti szünidőre esett, s ennek folytán a választmány a nevezett napot jelölte meg mint legalkalmasabbat. A körözött aláirási iv szerint jelen voltak:

Ábrahám István, Balog Mór, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Bodola Lajos, Bozóky Endre, Csillag Vilmos, Csopey László, Dietz Lajos, Erdődy Imre, Feichtinger Győző, Fraunhoffer Lajos, Fröhlich Izidor, Füzy Rezső Gruber Nándor, Horti Henrik, Kalecsinszky Sándor, Kármán Ferencz, Károly Irén, Kiss Gábor, Kiss Károly, Kopp Lajos, Koschowitz Gyula, Kőnig Gyula, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz, Lengyel István, Mórotz Kálmán, Oberle Károly, Pekár Dezső, Pilcz Ottó, Rados Gusztáv, Rejtő Sándor, Róna Zsigmond, Rucsinszki Lajos, Schmidt Ágoston, Szabó József (Vácz), Szabó Péter, Szekeres Kálmán, Szirtes Ignácz, Szuppán Vilmos, Tangl Károly, Tőtössy Béla, Tordai Imre, Visnya Aladar, Wittmann Ferencz, Zemplén Győző, összesen 48, a kikhez a közgyülés adminisztrativ teendőinek befejeztével még csatlakoztak br. Eötvös Loránd, Juckel Gyula és Mikola Sándor.

A közgyülés napirendje volt:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárvizsgáló bizottság jelentése.
4. Költségelőirányzat 1900-ra.
5. Tisztikar és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A napirend letárgyalása egy órai időnél kevesebbet vett igénybe és teljesen simán folyt le.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

Báró Eötvös Loránd akadályoztatása folytán Schmidt Ágoston alelnök nyitja meg a közgyűlést magvas és lendületes beszéddel, melyben a Társulatnak egyrészt a felső tanintézetek és különösen a Tudományos Akadémia, mint kiválóán tudományt mívelő intézmények mellett jogosultságát fejtegeti, és másrészt működését a tisztán népszerűsítő társulatokkal hasonlítja össze. Visszapillantást vet a Társulat keletkezésére és fejlődésére, és utalva kiadványainak sorozatára és a kebelében szünetlenül megnyilatkozó munkakedvre és munkaképességre, benne hazánkban életszükségletet lát, melynek biztos jövőt jósolhatni.

Az élénk éljenzéssel fogadott beszéd után, melylyel a közgyűlés megnyilt, következett a :

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

Az elmult társulati év zajtalan tevékenységben folyt le, de némileg mégis kedvezőtlennek nevezhetem, mert nem nyujtott alkalmat, hogy kötelességeinken túl is tehessünk Társulatunk érdekében. Jelentését ismét egyszerű szavakban rövidre foghatom.

A Társulat az elmult évben 11 rendes ülést tartott; összesen hat előadó tiz mathematikai, nyolcz előadó tíz physikai tárgygyal foglalkozott. A tárgysorozat, mely a VIII. évfolyam zárófüzetében közzé van téve, elég változatos és nem csupán ösmertető czikket, hanem egészen új dolgozatokat is tartalmaz.

A Mathematikai és Physikai Lapok VIII. kötete 28 ív terjedelemben megjelent. Az utolsó füzet, és ennek folytán a most megjelenő kötet első két füzetjének kissé késett megjelenése a szerzőn és a szerkesztőségen kívül eső okon magyarázandó. A kötet tartalma a rendes rovatokon kivül 30, részben önálló, részben ismertető czikk, mely 16 mathematikai és 14 physikai tárgy között oszlik meg. Kéziratokban — szerencsére — annyira nem volt hiány, hogy a legjobb akarat mellett eddig a tanulóversenyen díjat nyert dolgozatokat sem lehetett még közölni.

A mathematikai tanulóversenyt, — a sorozatban immár VI-ot — 1899 október 14-én tartottuk meg. A választmánynak egy korábbi határozata értelmében lehetőleg korán kellett volna megtartani, és tényleg előzetesen szeptember 23-ikára tűztük volt ki. Ámde a tanévnek az egyetemi építkezések folytán elhalasztott kezdete természetesen e verseny idejére is volt kihatással.

A szokott módozatok között Kolozsvártt 3, Budapesten 59 középiskolai érettségi vizsgálatot tett tanuló versenyezett, összesen tízzel több, mint a mult évben. Budapesten 39, Kolozsvártt 2 dolgozat készült el a versenyre engedélyezett négy óra alatt és a Kőnig Gyula elnöklete alatt működött tíztagu biráló-bizottság az első díjat Kornisch Ödönnek, a pécsi főreáliskola, a másodikat Spitzer Ödönnek, a budapesti VIII. ker. főreáliskola növendékének itélte oda, míg Devecis del Vecchio Mihály dolgozatát dicsérendőnek vélte. A választmány e határozathoz hozzájárulván, az eredmény szokás szerint az őszi első rendes ülésen hirdettetett ki.

A tanulóversenyek határozottan nagyon népszerűek és kétségen kivül terjesztik Társulatunk tevékenységének hirét. Már évekkel előbb készül az ifjuság e szellemi tornaünnepélyre, a mit a szerkesztőnek gyakrabban beküldött ifjusági dolgozatok is megerősítenek.

A választmányi üléseket most is csak oly számban tartottuk, a mint azt a Társulat ügyvezetése és az új tagok megválasztása követeli. A lefolyt év ezen ülései is kizárólagosan a beléletre vonatkozó tárgyakkal foglalkoztak.

Szorosan vett egyleti kötelességünkön túl ez évben legfölebb a Pallas Nagy Lexikon kiegészítőjéről tehetnék említést, a melyben Társulatunknak mint testületnek élénken része volt.

A mennyire magától érthető kötelességünk volt, hogy az ezredévi kiállításon részt vegyünk, annyira nem lett volna czélszerű, ha a Társulat mint testület a párisi világkiállitást felkereste volna. Egyes tagok természetesen úgy kiállítókul, mint az ott tartandó kongresszusokon résztvevőkül szerepelnek és megyugvással mondhatjuk, hogy ez oly módon történt és fog történni, hogy ebből a Társulatra is fog háramolni némi dicsőség.

Társulatunk tagszámának már a mult évi jelentésben kiemelt állandóságát az elmult év is megerősíti; jelenleg 407 tagunk van (egygyel kevesebb mint az elmult évben) és ezek között 15 pártoló és öröktiő és hat hölgytag. Ezek tagdíja mellett első sorban a Magyar Tudományos Akadémiának köszönhetjük fennállásunkat, a mely a mult évben is kegyes volt Társulatunkat 2000 koronányi segélyösszeggel támogatni. Bizonyára egyet méltóztatnak velem érteni, ha nagylelkü támogatásáért legmélyebben érzett hálánkat fejezem ki.

A létszám stationálása természetesen annyit jelent, hogy a Társulatot nem jelentéktelen számban felkereső új tagok helyett ugyanannyi régi tagot veszítünk. A veszteség oka elég gyakran a tanárnak nem épen fényes helyzete, de vannak — fájdalom — a kiket visszahozhatlanul kell siratnunk. Majoros Endre, Malesevics Miklós, Potomcsik Ignácz, Sárgay Antal, Soós Mihály, Tinyó Jánosban sok év óta hűséges tagot vesztettünk.

Kiadványaink immár tisztes kötetsort képeznek, és nem ámítjuk magunkat, ha hiszszük, hogy tanulóversenyeinkkel a tanügy terén is hasznos szolgálatot teljesítünk. A mire a titkári jelentés már több izben mutatott, elérkezettnek véljük tehát az időt, hogy a Társulat a nagyméltóságu vallás- és közoktatásügyi Miniszter úrhoz alkalmas alakban adandó segélyért folyamodhassék. A Miniszter úr irántunk való hajlandóságának már több izben jelét adta s így remélhető, hogy kérésünk meghallgatásra találhat. Meg szeretném említeni, hogy a választmány e remélt segélyből, természetesen önállóságának teljes fenntartása mellett, a középiskolai Mathematikai Lapoknak is kivánna juttatni, elismerésül azon szolgálatokért, melyeket e hasznos folyóirat a tanítás terén és versenyeink előkészítése körül teljesít. Az erre vonatkozó emlékirat megvan már, csak benyujtásának legkedvezőbb pillanatát várjuk be.

Egy három évi cyklus véget ért; szivből köszönöm azt a kedves jóindulatot, melylyel a tisztelt Társulat a titkárságot és a szerkesztőséget munkájában mindenkor támogatni szives volt és kérve, hogy megbizatásunk utolsó aktusát, e rövid jelentésemet tudomásul venni méltóztatnék, kérem, hogy jóindulatukkal ajándékozzák meg utódainkat is.

Budapest, 1900 április 30-án.

3—4. Pénztárnok jelentése.

A 250. és 251. oldalokon kitüntetett jelentés meghallgatása és az egyes tételek egyenként való mérlegelése után a közgyülés megadja a pénztárnoknak a felmentvényt, és költségelőirányzatát 1900-ra egyhangulag elfogadja.

5. Tisztikar és választmányi tagok választása.

A triennium leteltével alapszabályaink 20. §-ának rendelkezése értelmében az egész tisztikar lelépett és a választmányból kiléptek Bartoniek Géza, Szily Kálmán, Than Károly és Wagner Alajos v. tt. A közgyülés felfüggesztetvén, a választásokra került a sor, melyek könnyítése céljából az eddigi tisztikar névsorát feltüntető lajstrom osztatott szét.

A beadott 48 szavazat közül Tőtössy Béla elnöksége alatt Szabó József, Kürschák József és Szekeres Kálmán tagtársakból állott szavazatszedő bizottság jelentése alapján esett

báró Eötvös Lorándra, mint elnökre 48 szavazat. Alelnökök lettek: König Gyula 47 és Schmidt Ágoston 47; titkárok: Kövesligethy Radó 47, és Rados Gusztáv 47; jegyzők: Kopp Lajos 47, Kürschák József 47 és pénztárnok Feichtinger Győző 47 szavazattal.

A választmányba beválasztották Bartoniek Gézát 47, Szily Kálmánt, Than Károlyt és Wagner Alajost 48 szavazattal. Szavazatot kapott még az alelnökségre Fröhlich Izidor 2, a titkárságra Kürschák József és Tangl Károly 1—1, mint jegyző Mikola Sándor 2, mint pénztárnok Gruber Nándor, és mint választmányi tag Bodola Lajos 1 szavazatot.

Tisztikar és választmány tehát teljességgel a régi maradt.

6. Indítványok.

Az alapszabályok (24. §. 6. pont) által követelt időben indítvány nem adatott be. Április 13-iki kelettel azonban Fényes Dezső tagtársunk beadványt intézett a választmányhoz, melyben kéri, hogy a közgyűlés a következő indítványát vegye tárgyalás alá:

«Mondja ki a közgyülés, hogy a legközelebbi rendes közgyülést Aradon tartja meg s az ennek rendezésére vonatkozó munkálatok végzésére a választmányt felkéri.»

A beadvány mindazonáltal készséggel felolvastatott, de a közgyülés, a mely amugy is ismeri a választmánynak már egy izben kijelentett hajlandóságát vidéki közgyülések tartása iránt König alelnök felszólalása után az indítványt nem veszi tárgyalás alá, hanem a választmányhoz utalja át tárgyalás végett.

Ezzel a közgyülés hivatalos része befejeződött, s miután Dietz Lajos és Károly Irén a mult közgyülés jegyzőkönyvét hitelesítették, alelnök a gyülést berekeszti.

*

Este 6 órakor a műegyetem technikai fizikai tantermében még négy rövid, fölötte tanulságos előadást hallgattunk. Wittmann Ferencz: «az áram és mágnesi tér kölcsönös hatásáról», majd előadási kisérletek az akustikából» czím alatt megkapó kisérletekkel bőven ékeskedő előadást tartott. Majd Kürschák József értekezett «az elemi geometriai szerkesztések elméletéről» és végül Balog Mór bemutatta mozgatható, elmésen készített ábrázológeometriai modelljét a kör és ellipsis rokonságának kitüntetésére.

Alelnök megköszönvén a valóban tanulságos, szép előadásokat, a hetedik rendes közgyülést berekeszti.

3. *1899. évi zárszámadás.*

BEVÉTEL	Előirányzat frt	kr.	Eredmény frt	kr.	KIADÁS	Előirányzat frt	kr.	Eredmény frt	kr.
1898. évi zárszámadási maradvány	1418	05	1418	05	Nyomdai költségek	3770	45	1888	54
Örökitő tagdijak			25	—	Irói tiszteletdijak	1733	—	1498	40
Folyó évi tagdijak	1300	—	862	50	Kisebb nyomtatványok	—	—	36	06
Hátralékos tagdijak	1692	—	911	65	Expeditió	180	—	168	57
M. Tud. Akademia segélye	1000	—	1000	—	Irodai költségek	210	—	233	81
Hirdetési dijak	80	—	—	—	Középisk. math. tanulóverseny költs.	80	—	79	60
Kamatok	268	40	250	52	Alaptőkéhez csatoltatott	—	—	125	—
Előfizetési dijak	215	—	364	40	Maradvány készpénzben frt 15.17				
Vegyes bevételek			2	83	Takarékpénztári betétben 789.80			814	97
	5973	45	4834	95		5973	45	4834	95

Vagyon-mérleg.

VAGYON					TEHER				
Készpénz frt	867	85	15	17	Nyomdai tartozások frt	1870	06	1689	61
Forgó tőke:					Ki nem fizetett irói tiszteletdijak	440	—	210	—
Leszámitoló és pénzváltó bankban			74	40	Jövő évi számlára átviendő egyenleg	699	99	20	36
M. kir. postatakarékpénztárban	550	20	715	40	Tiszta vagyon	6210	—	6235	—
Alaptőke:									
Első hazai takarékp.	1060	—	1185	—					
1 drb koronajáradék-kötvény	50	—	50	—					
Majthényi Ottó-féle alap	5000	—	5000	—					
Tagdijhátralékok	1692	—	1027	—					
Föl nem vett hirdet. dij			80	—					
	9220	05	8146	97		9220	05	8146	97

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk. Budapesten, 1900 april 5.

A választmány megbizásából: *Radós Gusztáv* s. k. titkár. A közgyülés megbizásából:

Gruber Nándor s. k. *Kürschák József* s. k. *Bogyó Samu* s. k. *Balog Mór* s. k.

BEVÉTEL — 4. *1900. évi költségelőirányzat.* — KIADÁS

	kor.	fill.	kor.	fill.
1899. évi zárszámadási maradvány			1609	94
Folyó évi tagdijakból			2639	—
Hátralékos tagdijakból			2054	—
M. Tud. Akadémia segélye			2000	—
Hirdetési dijak			320	—
Kamatok:				
a) Majthényi Ottó-féle alap kam.	400	—		
b) alapitványok kamatai	102	80		
c) koronajáradék szelvénye	4	—		
d) időközi kamatok	50	36	557	16
Előfizetési dijak			500	—
			9680	10

	kor.	fill.	kor.	fill.
Nyomdai tartozások	3379	22		
Folyó évi nyomdai költségekre	2520	88	5900	10
Irói tiszteletdijak:				
a) ki nem fizetett irói dijak	420	—		
b) folyó évi irói dijak és szerkeszt.	2400	—	2820	—
Expeditió			400	—
Irodai költségek			400	—
Középisk. math. tanulóverseny			160	—
			9680	10

IRODALOM.

Goldbach törvénye.

Az u. n. GOLDBACH-féle törvény* szerint tudvalevőleg minden páros szám $2n$ előállítható mint két, x és y törzsszámnak összege. Ezt az állítást még máig sem bizonyították be és annál kevésbé tudják minden páros szám ily felbontásainak számát függetlenül megadni. Köszönetet érdemel tehát CANTOR G., a ki e törvényt kisérleti uton megvizsgáltatta mind az 1000-nél kisebb páros számokra nézve is vizsgálatainak eredményét egy táblázatban közzétette.**

Ez a táblázat minden $2n$ páros számnak adja felbontását két, x és y törzsszámösszeadandóra, a hol $x \leqq y$, oly módon, hogy megadja az összes hozzátartozó x törzsszámokat és az utóbbiaknak számát ν-t is.*** E táblá-

---

* Ugy látszik, hogy GOLDBACH vette először észre e törvényt. Azután EULER-rel közölte észleletét, a mint ezt EULERnek egy GOLDBACHhoz czimzett és 1742 junius 30-áról keltezett leveléből látjuk. (v. ö. P. H. FUSS, Correspondence mathématique et physique de quelques célèbres géométres du XVII e siécle Szt. Pétersbourg 1843. I. k). EULER az említtet levélben még megjegyzi, hogy más két GOLDBACH-tól felállított tétel helyességét azonnal kitudja mutatni, ha a GOLDBACH-féle törvényt helyesnek ismeri el, t. i.

a) *Minden páratlan szám előállítható mint 3 törzsszám összege.*

b) *Minden g egész szám előállítható mint tetszőleges számú törzsszám és végül mint g egység összege.*

Lucas «Théorie des nombres, Paris 1891» cz. művében e tételt WARINGInek (Meditationes abgebraicae) tulajdonitja; de mindenesetre Goldbachot illeti meg az elsőség.

** Association francaise pour l' avancement des sciences. Congrés de Caen 1894.

*** Az 1 számot úgy CANTOR mint én a törzsszámok közé vettük. Ennek jogosultságáról a vélemények eltérnek. Ez a felvétel avval az előnynyel bir, hogy így a 2 is hódol a GOLDBACH-féle törvénynek, mely így $1+1$-re bontható fel. Minden egyéb páros számra e felbontás lényegtelen, mert mindezeknél $\nu>1$.

zatból az következik, hogy a Goldbach-féle törvény szigorúan helyes és hogy ν értékei ingadozásokat mutatnak ugyan, melyek eféle számelméleti függvényeknek sajátságai, de n értékének növekedtével folyton nagyobbodnak.

Mivel az első ezer szám közül jóval több a törzsszám mint a többiek közül (1—1000-ig van 169, 1001—2000-ig 135, 2001—3000-ig 127, 3001—4000-ig 120, 3001—5000-ig 119), kívánatosnak látszott e törvény megvizsgálásának folytatása. Különösen pedig ν viselkedésének további tanulmányozására kívántam bővebb anyagot. Ez okokból az 5000-ig terjedő összes páros számoknak szétbontását egy tőlem adott eljárás szerint kiszámíttattam.* Eleinte szándékom volt e vizsgálatot 10000-ig folytatni; de mivel a táblázat terjedelme mindjobban növekszik, minél magasabbnak választjuk a felső határt, megszorítása 5000-ig feltétlenül szükséges volt, hogy a táblázatnak túlságos nagy terjedelmét kikerüljük.

Legyen itt megengedve, hogy az e táblázatból kiadódó eredményeket röviden összefoglaljam. Mindenekelőtt kitűnik, hogy a Goldbach-féle törvény az összes megvizsgált számokra kivétel nélkül érvényes, sőt a törvény érvényességét a 10,000-ig terjedő összes páros számokra is bizonyíthatom. A Cantor úr által táblázatában tett észrevétel, hogy ν is — az előbb említett számelméleti ingadozásoktól eltekintve — n növekedtével növekszik, továbbra is érvényesnek bizonyul. Igy pl. $\nu > 10$, ha $2n > 428$ és $\nu > 20$, ha $2n > 1412$. Ép ez a körülmény szól különösen a mellett, hogy a Goldbach-féle törvény általánosan érvényes.

Ha megfigyeljük a ν számok sorát, azonnal egy további nevezetes törvényszerüség tünik fel, melyet Cantor úr is, mint velem szóbelileg közölte, már előbb táblázatában észrevett. Az tünik ki t. i., hogy mindama $2n$ számoknál, melyek 3-mal oszthatók, ν relativ maximumot ér el tekintettel a két megelőző és két következő $2n$-hez tartozó ν értékekre nézve. Ez a jelenség $2n = 36$-tól kezdve — addig ν értékei kisebbek, semhogy azt észrevehetnők — az egész táblázaton végig élesen fellép, avval az egyetlen kivétellel, hogy $2n = 1540$ és $2n = 1542$ értékekhez ugyanaz a ν tartozik, ν ama értéke tehát, mely egy 3-mal osztható $2n$ számhoz tartozik, kivétel nélkül felső határa ama ν számoknak, melyek a két közvetetlenül megelőző $2n$ számokhoz tartoznak. E jelenség magyarázata az, hogy a $6m$ alakú számok kétféle felbontást engednek meg, t. i. vagy $x = 3k+1$ és $y = 3l+3$, vagy $x = 3k+2$ és $y = 3l+1$, mig a $6m+2$ alakuak csak egyféleképp bonthatók fel: $x = 3k+1$, $y = 3k+1$ és a $6m+4$ alakúak szintén csak egyféleképp

---

* Ez a táblázat legközelebb kimerítő szöveggel a «Kaiserl. Leopoldinisch Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher» Nova Actainak 72. kötetében fog megjelenni.

$x=3k+2$, $y=3l+2$ a két utóbbi esetben az egy $x=3$, $y=2n+3$ felbontás is előfordulhat. Ha már most minden páratlan szám törzsszám lenne, akkor a 3-mal osztható $2n$ számok ν értékei számára *kellene* relativ maximumoknak fellépniök; a törzsszámok nagyon rendetlen eloszlásánál azonban a relativ maximumoknak ez az éles kidomborodása nagyon meglepő és említésre méltó.

A ν számok szabályszerüsége a 3 számra vonatkozólag adta meg a gondolatot, hogy megvizsgáljuk, vajjon a többi törzsszámokra vonatkozólag előállanak-e hasonló szabályok. Ha a $2n$ számokat felosztjuk (mod. 5)-re vett maradékaik szerint, akkor a lehetséges felbontásokra a következő táblázatot nyerjük:

Maradék	x	y	
0	$5k+1$	$5l+4$	
	$5k+2$	$5l+3$	
	$5k+3$	$5l+2$	
	$5k+4$	$5l+1$	
2	$5k+1$	$5l+1$	
	$5k+3$	$5l+4$	
	$5k+4$	$5l+3$	
4	$5k+1$	$5l+3$	
	$5k+2$	$5l+2$	
	$5k+3$	$5l+1$	esetleg még
6	$5k+2$	$5l+4$	$x=5, y=2n-5$
	$5k+3$	$5l+3$	
	$5k+4$	$5l+2$	
8	$5k+1$	$5l+2$	
	$5k+2$	$5l+1$	
	$5k+4$	$5l+4$	

Tehát minden 5-tel osztható $2n$ értékre nagyobb ν értéket várhatunk, mint a szomszédos számokra nézve. Hogyha a táblázatot erre nézve meg akarjuk vizsgálni, természetesen az előbb megállapított törvényszerüséget 3-ra nézve tekintetbe kell vennünk és ezért a ν számok megvizsgálását kettős módon kell eszközölnünk. Először kell a 3-mal osztható $2n$ számok sorozatát megvizsgálnunk és másodszor ama $2n$ számok sorozatát, melyek megmaradnak, ha az összes $2n$ szám közül mind a csak 3-mal és nem egyuttal 5-tel sorozhatókat kitörüljük. Mindkét esetben — kevés kivétellel az a ν szám, mely egy öttel osztható számhoz tartozik, ama ν értékeknek felsőhatárát képezik, melyek a közvetlenül megelőző és öttel nem osztható

$2n$ számokhoz tartoznak; többnyire még relativ maximumok is élesen kidomborodnak. Ha vannak is, mint már említők, kivételek ebben az esetben, mégis a törvényszerüség még mindig nagyon feltünő, tekintettel a törzsszámok rendetlen elosztására.

Hasonló módon folytathatjuk a vizsgálatot és megvizsgálhatjuk a ν számokat a 7 számra vonatkozólag. Analogokból várhatjuk, hogy valamely 7-tel osztható $2n$ számhoz tartozó ν érték felső határa lesz mindama $2n$ szám ν értékeinek, a melyek az illető és a megelőző 7-tel osztható szám között feküsznek:

Most meg kell vizsgálnunk 4 különböző számsorozatot, t. i.

1. A 3—5-tel osztható $2n$ számok sorozatát.

2. a 3-mal osztható $2n$ számok sorozatát, miután közülök az 5-tel és nem egyuttal 7-tel is osztható számokat kitörültük.

3. az 5-tel osztható $2n$ számok sorozatát, miután közülök a 3-mal osztható számokat törültük.

4. mindáma $2n$ számok sorozatát, melyekből a 3-mal vagy 5-tel és nem egyuttal 7-tel osztható számokat törültük.

Tényleg e négy sorozatra az előbb kimondott feltevés kevés kivétellel igaznak bebizonyul.

Ha ily módon a vizsgálatot folytatjuk, akkor, ha 1-et első, 2-t második, 3-mat harmadik stb. törzsszámnak jelöljük, az n-edik törzsszámnál összesen $2n$—3 ily számsorozatot kell vizsgálnunk. Mindeme sorozatokban az a ν szám, mely egy p-vel osztható $2n$ számhoz tartozik, kevés kivétellel felső határa mind ama $2n$ számokhoz tartozó ν értékeknek, mely számok az illető és a megelőző p-vel osztható szám között vannak.

Minthogy egyelőre teljesen lehetetlennek látszik, hogy ν-t mint n függvényét meghatározzuk, fentebbi szabályszerüségeknek megállapítása talán nem érdektelen; úgy látszik tehát, hogy ν lényegesen attól függ, mely törzsszámokkal osztható $2n$ és nem attól, hányszor osztható $2n$ valamelyikükkel.

Egyebekben a táblázatot magát kisérő, kimeritő szövegre kell utalnom. Legyen még megengedve, hogy röviden megmutassam, hogyan lehet egy eszközt szerkeszteni, melynek segélyével minden $\leq$ 2 N páros számnak felbontását törzsszám összeadandókra minden számítás nélkül megkaphatjuk. Két parallel szallagra felirjuk az összes páratlan számokat 1-től 2N—1-ig egyenlő távolságban egymástól, az egyik szallagon növekvő, a másikon fogyó sorrendben; a törzsszámokat mindkét szallagon valamiképen kiemeljük. Ha már most a két szallagot addig eltoljuk, mig az első szallag 1 száma szemben áll a második szallag $2n$—1 számával, a hol $n \leq N$, akkor mind amaz esetek, a melyekben mindkét szallagon törzsszámok állanak egymással szemben, megadják $2n$ minden felbontását törzsszám összeadandókra* ; a mellett az első szallagnak csak ama törzsszámait kell tekintetbe vennünk, melyek $\leqq n$. Nagyobb kényelem szempontjából mindkét szallagot a beállítás megtörténte után egy tekercsről le — és egy másikra fel kellene göngyölíteni. Könnyü azután még egy számolóművet alkalmazni, mely megadja a ν számot a legöngyölítés megtörténte után.

HAUSSNER R. előadása a «Deutsche Mathematiker-Vereinigung» 1896-iki gyűlésén; fordította KOPP LAJOS.

---

* Csak $4=2+2$ felbontás nem áll elő; ez azonban általában kivételes helyzetet foglal el, mert az egyedüli felbontás, melynél 2 lelléphet. Ha ezt a felbontást figyelmen kivül hagyjuk, előnyünk, hogy csak a páratlan számokat vesszük igénybe.

A SZÁMOK OSZTHATÓSÁGA ELMÉLETÉHEZ.

Ismerünk eljárásokat, a melyek szerint valamely adott szám-, függvény-, vagy alakból újakat képezünk, a melyek bizonyos tekintetben az adottakkal azonos tulajdonságot mutatnak. Ilyen egyszerű eljárás az, a melylyel két egész szám legnagyobb közös osztóját határozzuk meg; szerinte a két adott számból két más — kisebb — számot alkotunk, a melyeknek ugyanazon legnagyobb közös osztójuk van, mint az adott számoknak. Egy másik ilyen eljárás az, a melylyel megállapítjuk, hogy valamely szám 3-mal vagy 9-czel osztható-e; ekkor is egy új számot, az adott szám számjegyeinek összegét képezzük s ez az adott számmal egyidőben osztható vagy nem osztható 3-mal, ill. 9-czel.

A számelméletre nézve tehát úgy elméleti, mint gyakorlati fontossággal birhat oly számok ismerete, melyek valamely adott számmal egyidőben oszthatók vagy nem oszthatók egy adott osztóval. Bizonyos számok ilyen tulajdonságát fejezi ki a következő tétel is:

Ha r és s oly két szám, a melyre nézve

$$rs \equiv 1 \pmod{p}, \tag{1}$$

akkor az

$$\begin{aligned} A_m = x_0 r^{n-m} + x_1 r^{n-m-1} + \cdots + x_{n-m} + x_{n-m+1} s + \\ + x_{n-m+2} s^2 + \cdots + x_n s^{n-m} \end{aligned} \tag{2}$$

$$(m=0, 1, \ldots, n)$$

számok bármelyike az összes itt felsorolt többi számokkal egyidőben osztható vagy nem osztható p-vel.

Ugyanis szorozzuk meg az

$$A_0 = \sum_{i=0}^{n} x_i r^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-m} x_i r^{n-i} + \sum_{i=n-m+1}^{n} x_i r^{n-i}$$

számot s^m-nel, hol

$$1 \leq m \leq n,$$

akkor

$$s^m A_0 = s^m r^m \sum_{i=0}^{n-m} x_i r^{n-m-i} + \sum_{i=n-m+1}^{n} x_i r^{n-i} s^{n-i} s^{m-n+i}. \qquad (3)$$

De az (1) alatti feltételi kongruencziával együtt fennáll az

$$r^t s^t \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ p)$$

kongruenczia is, még pedig a t minden pozitiv egész számú értékénél s így erre való tekintettel a (3) alatti egyenlőség jobb oldala mod. p-re nézve a

$$\sum_{i=0}^{n-m} x_i r^{n-m-i} + \sum_{i=n-m+1}^{n} x_i s^{m-n+i}$$

kifejezés értékével kongruens. De ez a kifejezés azonos a (2) alatti A_m értékkel, azaz

$$s^m A_0 \equiv A_m \ (\mathrm{mod.}\ p);$$

és minthogy p és s a feltételi kongruenczia szerint relativ törzsszámok, A_0 és A_m csak egyszerre lehetnek oszthatók vagy nem oszthatók p-vel. Ha m egymásután felveszi az értékeket 1-től n-ig, úgy A_m egymásután felveszi az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ értékeket s így ezek mind A_0-sal egyidőben oszthatók vagy nem oszthatók p-vel.

Ezzel a tétel be van bizonyítva.

Érdekes azonban e tételt, mielőtt néhány jól ismert gyakorlati esetre vonatkoztatjuk, más oldalról is megvilágítani.

E tétel ugyanis így is fogalmazható:

Ha r és s oly számok, a melyek az

$$rs - 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ p) \qquad (4)$$

kongruencziának eleget tesznek és

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$$

oly értékrendszer, mely az

$$\left.\begin{array}{l} r^n x_0 + r^{n-1}x_1 + \cdots + r^2 x_{n-2} + r x_{n-1} + x_n \equiv 0 \\ r^{n-1}x_0 + r^{n-2}x_1 + \cdots + r x_{n-2} + x_{n-1} + s x_n \equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r x_0 + x_1 + \cdots + s^{n-3}x_{n-2} + s^{n-2}x_{n-1} + s^{n-1}x_n \equiv 0 \\ x_0 + s x_1 + \cdots + s^{n-2}x_{n-2} + s^{n-1}x_{n-1} + s^n x_n \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p}$$

homogen lineár kongruencziák egyikét kielégíti, akkor ez az értékrendszer kielégíti az összes többi kongruencziákat is.

Ennek bebizonyitására alkossuk meg először a kongruenczia-rendszer determinánsát:

$$D_n = \begin{vmatrix} r^n & r^{n-1} \dots r^2 & r & 1 \\ r^{n-1} & r^{n-2} \dots r & 1 & s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r & 1 \dots s^{n-3} & s^{n-2} & s^{n-1} \\ 1 & s \dots s^{n-2} & s^{n-1} & s^n \end{vmatrix}.$$

Vonjuk most le a második sor r-szeresét az első sorból, úgy

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 \dots 0 & 0 & 1-rs \\ r^{n-1} & r^{n-2} \dots r & 1 & s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r & 1 \dots s^{n-3} & s^{n-2} & s^{n-1} \\ 1 & s \dots s^{n-2} & s^{n-1} & s^n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} r & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r^{n-1} & r^{n-2} \dots r & 1 \\ r^{n-2} & r^{n-3} \dots 1 & s \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r & 1 \dots s^{n-3} & s^{n-2} \\ 1 & s \dots s^{n-2} & s^{n-1} \end{vmatrix}.$$

De a használt jelölés értelmében az első determináns tényező D_1-gyel, a második D_{n-1}-gyel egyenlő és így

$$D_n = (-1)^{n-1} D_1 \,.\, D_{n-1},$$

és ugyanazon oknál fogva

$$D_{n-1} = (-1)^{n-2} D_1 \,.\, D_{n-2}$$
$$D_{n-2} = (-1)^{n-3} D_1 \,.\, D_{n-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_2 = (-1)^1 D_1 \,.\, D_1$$
$$D_1 = (-1)^0 D_1 \,.$$

Ezen egyenlőségek szorzásából következik, hogy

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D_1^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (rs-1)^n.$$

A D_n determináns ezen értékéből a (4) alatti kongruencziára való tekintettel következik, hogy

$$D_n \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p),$$

és így az (5) alatti homogén lineár kongruencziáknak mindig van a zérustól különböző közös megoldásuk.

Most kimutatjuk, hogy a D_n determináns minden másodfokú aldeterminánsa mod. p-re nézve zérussal kongruens.

Képezzük a determináns $(h+1)$-dik és $(h+i+1)$-dik sora $(k+1)$-dik és $(k+l+1)$-dik elemeiből alkotott másodrendű aldeterminánsát. Ez ily alakban irható:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} r^{n-(h+k)} & r^{n-(h+k+l)} \\ r^{n-(h+i+k)} & r^{n-(h+i+k+l)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

a hol azonban megjegyzendő, hogy valahányszor valamelyik elem hatvány-kitevője negativ, mindannyiszor benne r helyett s a megfelelő pozitiv hatványkitevővel irandó.

A $\varDelta$ determináns vizsgálatánál már most három lehetőség fordulhat elő.

a) *A $\varDelta$ determináns minden elemének hatványkitevője pozitiv;* akkor

$$\varDelta = r^{2n-(2h+i+2k+l)} - r^{2n-(2h+i+2k+l)} = 0.$$

b) *A $\varDelta$ determináns a_{22} elemének hatványkitevője negativ, a többi elemé pozitiv;* akkor

$$\Delta = \begin{vmatrix} r^{n-(h+k)} & r^{n-(h+k+l)} \\ r^{n-(h+i+k)} & s^{h+i+k+l-n} \end{vmatrix}$$

$$= r^{2n-(2h+i+2k+l)}\,(r^{h+i+k+l-n}\,s^{h+i+k+l-n} - 1).$$

c) *A Δ determináns két elemének hatványkitevője negativ* (a_{22} és pld. a_{12}-é); akkor

$$\Delta = \begin{vmatrix} r^{n-(h+k)} & s^{h+k+l-n} \\ r^{n-(h+i+k)} & s^{h+i+k+l-n} \end{vmatrix}$$

$$= r^{n-(h+i+k)} s^{h+k+l-n}\,(r^i s^i - 1).$$

Minden egyéb esetben, midőn ugyanis a_{22} és a_{21}, vagy a_{22}, a_{12} és a_{21}, vagy midőn a Δ mind a négy elemének hatványkitevője negativ, a másodrendű aldeterminánsok kiszámítása a *c)*, *b)*, ill. *a)* esetre vezethetők vissza.

Látjuk tehát, hogy minden esetben

$$\Delta \equiv 0 \;(\text{mod.}\, p),$$

mert a (4) alatti feltételi kongruencziával együtt az

$$r^t s^t - 1 \equiv 0 \;(\text{mod.}\, p)$$

kongruenczia is áll, t minden pozitiv egész számú értékénél.

De abból, hogy D_n minden másodfokú aldeterminánsa mod. p-re nézve zérussal kongruens, következik, hogy minden

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

értékrendszer, mely az (5) alatti kongruencziák egyikét kielégíti, kielégíti egyúttal a többieket is, és ezt akartuk épen bebizonyítani.

E tárgyalást már most a tétel nehány gyakorlati vonatkozásával fejezem be.

1. Legyen valamely szám a tizes számrendszerben kifejezve

$$A_0 = [x_0 x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n] =$$

$$= x_0 \cdot 10^n + x_1 \cdot 10^{n-1} + \cdots + x_{n-1} \cdot 10 + x_n, \tag{6}$$

és tegyünk a tételben

$$r = 10$$

$$s = 1;$$

úgy ezek mod. 3 és 9-re nézve eleget tesznek az (1) alatti feltételi kongruencziának, mert

$$rs = 10 \equiv 1 \pmod{3,\ 9}.$$

De akkor a tétel értelmében

$$\begin{aligned} A_n &= x_0 + x_1 . 1^1 + x_2 . 1^2 + \cdots + x_{n-1} . 1^{n-1} + x_n . 1^n = \\ &= x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \end{aligned}$$

szám A_0-sal egyidőben osztható vagy nem osztható 3, ill. 9-czel.

2. Legyen ismét a szám a tizesszámrendszerben kifejezve a (6) alatti A_0 szám, és a tételben tegyünk

$$r = 10$$
$$s = -1,$$

úgy ezek mod. 11-re nézve eleget tesznek az (1) alatti feltételi kongruencziának, mert

$$rs = -10 \equiv 1 \pmod{11};$$

de akkor a tétel értelmében

$$\begin{aligned} A_n &= x_0 + x_1 . (-1)^1 + x_2 . (-1)^2 + \cdots + x_{n-1} . (-1)^{n-1} + x_n . (-1)_n \\ &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots + (-1)^n x^n \end{aligned}$$

szám szintén A_0-sal egyidőben osztható vagy nem osztható 11-gyel.

Az 1. és 2. alatti eredmények a számoknak jól ismert 3-mal, 9-czel és 11-gyel való oszthatósági tételekkel azonosak.

3. Legyen ismét a szám a tizesszámrendszerben kifejezve a (6) alatti A_0 szám és tegyünk a tételben

$$r = 10$$
$$s = -2,$$

úgy ezek mod. 3, 7 és 21-re nézve ismét eleget tesznek az (1) alatti feltételi kongruencziának, a mennyiben

$$rs = -20 \equiv 1 \pmod{3,\ 7,\ 21}.$$

De akkor a tétel értelmében

$$A_1 = x_0 . 10^{n-1} + x_1 . 10^{n-2} + \cdots + x_{n-2} . 10 + x_{n-1} + x_n(-2) =$$
$$= [x_0 x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_{n-1}] - 2x_n$$

szintén A_0-sal egyidőben osztható vagy nem osztható p-vel.

Ez is igen jól ismert eredmény, mely szerint:

ha valamely szám utolsó számjegyének kétszeresét az előtte álló számjegyek alkotta számból levonjuk, a maradék az adott számmal egyidőben osztható vagy nem osztható 3-mal, 7-tel, ill. 21-gyel.

Privorszky Alajos.

A VÉGES CSOPORTOK ELMÉLETÉNEK ÚJABB IRODALMÁBÓL.

(Harmadik közlemény.)

IV. A komplexusokról.

A véges komplexus definicziója. Komplexusnak nevezzük az elemeknek oly rendszerét, a melyre nézve meg van adva a szorzási törvény, a melyről kikötjük, hogy egyértelmű, associativ jellegű és hatására nézve véges legyen, azaz bárhányszor alkalmazva csak véges számú különböző elemet eredményezzen. Továbbá valamely elem szorzata különböző elemekkel különböző legyen.

Komplexust alkot pl. valamely csoportból tetszőleges módon kiválasztott elemek rendszere. És forditva az előbb adott definiczió következtében minden komplexust csoporttá lehet kiegésziteni. A komplexus elemeire a szorzás definiálva van, igy tehát világos, mi értendő a komplexusnak valamely hatványa alatt. *Valamely komplexus r-dik hatványa alatt értjük az elemekből alkotott r tényezős szorzatok komplexusát* (a tényezők között egyenlők is lehetnek). *Két komplexus közös elemeiből alkotott komplexus a két komplexusnak legnagyobb közös osztója; az a komplexus, mely a két komplexus összes elemeit és csak ezeket tartalmazza, a legkisebb közös többes.*

Ha két komplexus olyan, hogy a különböző komplexusokhoz tartozó elemekre nézve is meg van adva a szorzási törvény, a mely az előbb részletezett tulajdonságokkal bir: beszélhetünk e két komplexus *szorzat*áról. Mivel a szorzás általában nem lesz kommutativ jellegű, ügyelnünk kell a tényezők sorrendjére.

Az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ szorzat alatt értjük ama kéttényezős szorzatok komplexusát, a melyekben az első tényező $\mathfrak{A}$-nak, a második $\mathfrak{B}$-nek eleme.

Az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ komplexusokról akkor és csak akkor mondjuk, hogy kommutativek, ha

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}.$$

I. *Az $\mathfrak{A}$ komplexus elemei akkor és csak akkor alkotnak csoportot, ha:*

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Az (1) alatti reláczió először is szükséges feltétel; ha ugyanis $\mathfrak{A}$ csoport és A valamely eleme, akkor

$$\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}$$

és igy

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}.$$

Ha pedig az (1) alatti reláczió ki van elégitve, akkor

$$\mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}^2\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A}^n = \mathfrak{A}$$

$$(n=1, 2, 3, \ldots)$$

tehát az $\mathfrak{A}$ komplexus olyan, hogy elemeiből szorzatokat készítve, a komplexuson belül maradunk. Ezt hozzávéve a szorzás törvényének többi tulajdonságaihoz, csakugyan csoportot kapunk. E tételből folyik a következő:

II. *Két csoport legnagyobb közös osztója csoportot alkot. E csoport mindkét csoportnak alcsoportja.* Legyen ugyanis a legnagyobb közös osztó komplexusa ϑ, akkor ennek definicziójából adódik

$$\vartheta^2 = \vartheta,$$

a mivel a tétel ki van mutatva.

III. *Ha az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ csoportok legnagyobb közös osztója ϑ és e csoportok rendszámai szerint a, b, d, akkor az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ komplexus*

$\frac{ab}{d}$ *számú elemet tartalmaz, még pedig a szorzásnál mindegyiket d-szer kapjuk meg.** (FROBENIUS.)

Legyen

$$\mathfrak{A} = R_0\vartheta + R_1\vartheta + \cdots + R_{j-1}\vartheta \tag{2a}$$

és

$$\mathfrak{B} = \vartheta S_0 + \vartheta S_1 + \cdots + \vartheta S_{k-1}, \tag{2b}$$

tehát az $\mathfrak{AB}$ szorzat az

$$R_l\vartheta\vartheta S_m$$
$$\begin{pmatrix} l=0, 1, \ldots, j-1 \\ m=0, 1, \ldots, k-1 \end{pmatrix}$$

komplexusokból áll. De

$$R_l\vartheta\vartheta S_m = R_l\vartheta^2 S_m = R_l\vartheta S_m$$

s így tételünk teljesen be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy a ϑ csoport minden elemére nézve az

$$R_l\vartheta S_m \tag{3.}$$
$$\begin{pmatrix} l=0, 1, \ldots, j-1 \\ m=0, 1, \ldots, k-1 \end{pmatrix}$$

szorzatok különbözők. Ezt azonban könnyű bebizonyítani. Legyen ugyanis

$$R_l\vartheta S_m = R_n\vartheta S_r,$$

a hol ϑ helyébe mindkét oldalon a ϑ csoportnak egy-egy eleme értendő. Ezek az elemek lehetnek megegyezők, lehetnek különbözők) Akkor ebből következnék

$$(R_n^{-1}R_l)\,\vartheta = \vartheta\,(S_rS_m^{-1}). \tag{4}$$

Az $(R_n^{-1}R_l)$ eleme az $\mathfrak{A}$, az $(S_rS_m^{-1})$ szorzat a $\mathfrak{B}$ csoportnak. Mivel azonban az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ csoportoknak ϑ a legnagyobb közös osztója, (4)-ből következik, hogy

$$R_n^{-1}R_l \quad \text{eleme} \quad \vartheta\text{-nak}$$
$$S_rS_m^{-1} \quad \text{eleme} \quad \vartheta\text{-nak}$$

---

* A milyen egyszerűnek látszik e tétel, olyan fontosak következményei. Úgy, hogy bizvást *alaptételnek* tekinthető. A tételnek speciális esetei FROBENIUS előtt is már ismeretesek voltak.

a mi azonban ($2a$) és ($2b$) szerint csak akkor lehetséges az I. szakasz tárgyalásai értelmében, ha

$$l = n$$
$$r = m.$$

Tehát az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ különböző elemeinek száma:

$$jdk = \frac{a}{d} d \frac{b}{d} = \frac{ab}{d}$$

és minden elemet a szorzásnál d-szer állítunk elő.

IV. *Az előbbi tételben szereplő $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ komplexus akkor és csak akkor alkot csoportot, ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ kommutativek.*

Először is a feltétel szükséges. Ugyanis kell, hogy az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ komplexus a $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$-t tartalmazza, de III. szerint ez a két komplexus ugyanannyi elemet tartalmaz és így csakugyan szükséges, hogy

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

legyen.

Másodszor elegendő is a feltétel, mert teljesülése esetében

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2 = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{A})\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

s így I. szerint $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ tényleg csoport.

Ha $\mathfrak{A}$ valamely csoportnak invariáns alcsoportja, akkor kommutativ a csoport minden elemével, s így kommutativ magával a csoporttal, vagy annak bármely alcsoportjával. Ezt tekintetbe véve, kapjuk az előbbi tételből, mint speciális esetet, a következőt.

IV*b*. *Ha $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ alcsoportjai valamely $\mathfrak{H}$ csoportnak és $\mathfrak{A}$ invariáns alcsoport, akkor*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

szintén alcsoport. Rendje $\frac{ab}{d}$.

Az invariáns alcsoport fogalmából következik, hogy ha $\mathfrak{B}$ is *invariáns* $\mathfrak{H}$-nak *alcsoportja,* akkor $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ is *invariáns alcsoport.* Ugyanis

$$R\mathfrak{A} = \mathfrak{A}R$$
$$R\mathfrak{B} = \mathfrak{B}R$$

és így

$$R\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}R.$$

A IV. alatti tétel még így is lenne fogalmazható, hogy ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ egymáshoz kommutativ csoportok, akkor az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ szorzat adja meg az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ csoportok legkisebb közös többesét.

V. *Ha az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ csoportok az egységen kívül közös elemet nem tartalmaznak (relativ primek) és mindegyikök kommutativ a másik csoport minden eleméhez, akkor $\mathfrak{A}$ minden eleme kommutativ $\mathfrak{B}$ minden eleméhez és viszont.*

Ha A, B az $\mathfrak{A}$, illetőleg a $\mathfrak{B}$ csoportnak tetszőleges elemei, akkor a præmissák szerint

$$B^{-1}AB \quad \text{eleme } \mathfrak{A}\text{-nak}$$

$$A^{-1}B^{-1}A \quad \text{eleme } \mathfrak{B}\text{-nek}$$

és így

$$A^{-1}B^{-1}AB=A^{-1}(B^{-1}AB)=(A^{-1}B^{-1}A)B$$

közös eleme $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$-nek, tehát

$$A^{-1}B^{-1}AB=E$$

vagyis

$$B^{-1}AB=A$$

és ugyanígy

$$A^{-1}B^{-1}A=B^{-1},$$

a mivel tételünk be van bizonyítva.

VI. *Ha a $\mathfrak{H}$ csoport rendje*

$$n=ab, \quad (a,b)=1$$

és $\mathfrak{A}$ a-adrendű invariáns alcsoport, akkor más a-adrendű alcsoport nem létezik, továbbá minden alcsoport, melynek rendje a-nak osztója, egyszersmind $\mathfrak{A}$-nak alcsoportja (Frobenius).

Legyen ugyanis $\mathfrak{B}$ oly alcsoport, melynek rendje $\bar{b}$ a-nak osztója. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ legnagyobb közös osztója legyen ϑ, a csoportok rendjei: a, $\bar{b}$, d. Akkor $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ csoportot alkot. E csoport rendje $\frac{a\bar{b}}{d}$ és

$$n\equiv 0\left(\text{mod.}\ \frac{a\bar{b}}{d}\right) \tag{5}$$

azonban

$$n = ab, \quad (a, b) = 1, \quad a \equiv 0 \ (\text{mod.}\ \overline{b})$$

és így (5)-ből következik, hogy

$$d = \overline{b}$$

vagyis $\mathfrak{A}$ tartalmazza $\mathfrak{B}$-t.

A levezetés ugyanígy ismételhető, ha nem $\mathfrak{A}$-ról, hanem $\mathfrak{B}$-ről teszszük fel, hogy invariáns alcsoport. Ez a következő tételre vezet.

VII. *Ha a $\mathfrak{H}$ csoport rendje*

$$n = ab, \quad (a, b) = 1$$

és $\mathfrak{A}$ a-adrendű alcsoport, akkor minden invariáns alcsoport, melynek rendje a-nak osztója, alcsoportja $\mathfrak{A}$-nak.

A VI. és VII. tételeket könnyen lehet általánosítani. A bebizonyítás hasonló, a miért is nem ismételjük.

VIII*a*. *Legyen p_i törzsszám és a csoport rendje legyen:*

$$n = n' \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \quad n' = ab$$

$$(n', p_i) = 1, \quad (a, b) = 1.$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

Ha $\mathfrak{A}$ oly invariáns alcsoport, a melynek rendje

$$a \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i},$$

akkor minden alcsoport, melynek rendje a-nak osztója, alcsoportja egyszersmind $\mathfrak{A}$-nak.

VIII*b*. *Ha $\mathfrak{A}$ oly alcsoport, melynek rendje*

$$a \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i},$$

akkor minden oly invariáns alcsoport, a melynek rendje a-nak osztója, alcsoportja $\mathfrak{A}$-nak.

A komplexusokra vonatkozó alaptétel révén már most a következő tételt mutathatjuk ki.

IX. *Ha valamely csoport rendje n, és p törzsszám, akkor az $\frac{n}{p^\beta}$-adrendű alcsoportok száma $\equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ (mod. p), a szerint, a mint van közöttük invariáns alcsoport, vagy pedig nincs.*

E tételt teljes indukczióval fogjuk bebizonyítani, tehát először a $\beta = 1$ esetét tárgyaljuk. Ezt a következő segédtétellel kezdjük meg.

Segédtétel. Valamely p^2-edrendű csoportban a p-edrendű alcsoportok száma vagy 1, *vagy* $p+1$.*

Tegyük fel először, hogy a csoportnak van p^2-edrendű eleme. Jelöljük egyiköket A-val, akkor ennek hatványai alkotják a csoport elemeit. S így az összes p-edrendű elemek a következők:

$$A^p, A^{2p}, \ldots, A^{(p-1)p}$$

tehát számuk: $p-1$. Ezek az egységgel együtt p-edrendű alcsoportot alkotnak s több ilyen alcsoport nincs. Ha pedig nincs p^2-edrendű elem, akkor az egység kivételével, a csoport összes elemei p-edrendűek. Minden p-edrendű elem hatványai p-edrendű alcsoportot alkotnak, tehát minden elem valamely p-edrendű alcsoportban előfordul. Ez alcsoportok az egységen kívül közös elemeket nem tartalmaznak, tehát mindegyikökben $p-1$ számú különböző elem van és így az alcsoportok száma:

$$\frac{p^2-1}{p-1} = p+1.$$

Térjünk most át tételünkben a $\beta = 1$ esetére. Ha csoportunknak nincs $\frac{n}{p}$-edrendű alcsoportja, a tétel helyes, mert

$$0 \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p).$$

Ha a csoportnak vannak oly $\frac{n}{p}$-edrendű alcsoportjai, a melyek nem invariánsok, akkor ezeknek száma $\equiv 0 \,(\text{mod.}\, p)$. Legyen ugyanis pl. $\mathfrak{H}_1$ valamely ilyen alcsoport, akkor a III. szakasz szerint $\mathfrak{H}_1$-hez még $p-1$ számú alcsoport van konjugálva. Ha tehát az egymással konjugáltakat ugyanazon osztályba foglaljuk, akkor minden alcsoport egy és csak egy osztályban fordul elő. Minden osztály p számú alcsoportból áll s így az összes alcsoportok száma $\equiv 0 \,(\text{mod.}\, p)$. Tegyük fel végre, hogy van $\frac{n}{p}$-edrendű invariáns

* Hogy ezek az alcsoportok invariánsok, azt a III. szakaszból tudjuk.

alcsoport is. Ha csak egy van, akkor a tétel helyes és így fel kell vennünk, hogy több ilyen alcsoport létezik. Legyen pl. $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ két ilyen invariáns, $\frac{n}{p}$-edrendű alcsoport. Legnagyobb közös osztójuk szintén invariáns alcsoport és ha rendjét d-vel jelöljük, akkor

$$d = \frac{n}{p^2}.$$

Ugyanis a

$$\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2$$

szorzat az egész csoportot adja és így az előző tárgyalások szerint

$$n = \frac{n}{p} \frac{1}{d} \frac{n}{p},$$

tehát

$$d = \frac{n}{p^2}.$$

Ezek után az összes $\frac{n}{p}$-edrendű invariáns alcsoportokat a következő módon osztályozzuk. Kiválasztjuk pl. $\mathfrak{H}_1$-et és az i-dik osztályba sorozzuk mindama

$$\mathfrak{H}_1^{(i)}, \mathfrak{H}_2^{(i)}, \ldots \tag{6}$$

alcsoportokat, a melyeknek legnagyobb közös osztója $\mathfrak{H}_1$-vel ϑ_i (ϑ_i valamely $\frac{n}{p^2}$-edrendű invariáns alcsoport). Így a $\mathfrak{H}_1$ kivételével minden alcsoport egy és csak egy osztályban fog előfordulni. Ámde a

$$\frac{\mathfrak{H}_1^{(i)}}{\vartheta_i}, \frac{\mathfrak{H}_2^{(i)}}{\vartheta_i}, \ldots \tag{7}$$

csoportok nem mások, mint a

$$\frac{\mathfrak{H}}{\vartheta_i}$$

p^2-edrendű csoportnak összes p-edrendű alcsoportjai, kivéve a $\frac{\mathfrak{H}_1}{\vartheta_i}$ csoportot. Tehát segédtételünk értelmében a (7), illetőleg a (6) alattiak száma p vagy 0 és így az összes szóban forgó invariáns alcsoportok száma $\equiv 1 \pmod{p}$.

Ezzel tételünk a $\beta=1$ esetére le van vezetve. Végezzük most a teljes indukcziót. Tegyük fel, hogy tételünk az

$$\frac{n}{p}, \frac{n}{p^2}, \dots, \frac{n}{p^{\beta-1}}$$

-edrendű alcsoportokra már be van bizonyítva. Ha a csoportnak nincsenek $\frac{n}{p^\beta}$-adrendű invariáns alcsoportjai, akkor ismét a III. szakasz tárgyalásaiból következik, hogy az $\frac{n}{p^\beta}$-adrendű alcsoportok száma $\equiv 0 \pmod{p}$. Tegyük fel, hogy van $\frac{n}{p^\beta}$-adrendű invariáns alcsoport; ekkor ennek osztálycsoportja p^β-adrendű, ennek viszont minden $p^{\beta-1}$-edrendű alcsoportja invariáns és így csoportunknak van $\frac{n}{p}$-edrendű invariáns alcsoportja is. Az $\frac{n}{p^\beta}$-adrendű invariáns alcsoportok számának meghatározására már most a Frobenius-tól használt kettős megszámlálás módszerét használjuk. Legyenek az összes $\frac{n}{p}$-edrendű invariáns alcsoportok:

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_r, \quad r\equiv 1 \pmod{p} \tag{8}$$

az összes $\frac{n}{p^\beta}$-adrendű invariáns alcsoportok pedig:

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_s. \tag{9}$$

Az s meghatározása czéljából bevezetjük az a_ϱ, b_σ számokat. Az $\mathfrak{A}_\varrho$ tartalmazzon a_ϱ számú (9) alatti alcsoportot, míg $\mathfrak{B}_\sigma$ forduljon elő b_σ számú (8) alatti csoportban, akkor a (8) alatti csoportokban előforduló (9) alatti alcsoportokat a bevezetett jelek mindegyikével összeszámlálhatjuk és így lesz:

$$\sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma, \tag{10}$$

a mely egyenletből tovább következtetünk. A b_σ szám nem más, mint a

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{B}_\sigma}, \; p^\beta\text{-adrendű}$$

csoport $p^{\beta-1}$-edrendű alcsoportjainak száma. Mivel

$$p^{\beta-1} = \frac{p^\beta}{p}$$

lesz

$$b_\sigma \equiv 1 \text{ (mod. } p), \sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma \equiv s \text{ (mod. } p)$$

és így

$$s \equiv \sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho \text{ (mod. } p). \tag{11}$$

Határozzuk meg a_ϱ-t. Először is ki fogjuk mutatni, hogy $\mathfrak{A}_\varrho$ tartalmaz oly $\frac{n}{p^\beta}$-adrendű alcsoportot, mely neki invariáns alcsoportja. (Esetleg $\mathfrak{H}$-nak nem invariáns alcsoportja.) Ha $\mathfrak{A}_\varrho$ tartalmazná pl. $\mathfrak{B}_1$-et, akkor állításunk már is igaz. Ha nem tartalmazza, akkor

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_\varrho \mathfrak{B}_1 \tag{12}$$

és így legnagyobb közös osztójuknak ϑ-nak rendje

$$d = \frac{n}{p^{\beta+1}}$$

mivel (12) következtében

$$n = \frac{n}{p} \frac{1}{d} \frac{n}{p^\beta}.$$

A ϑ csoport invariáns alcsoport. Tehát $\mathfrak{A}_\varrho$-nak vannak $\frac{n}{p^{\beta+1}}$-edrendű és így a III. szakasz szerint $\frac{n}{p^\beta}$-adrendű invariáns alcsoportjai is. Ámde

$$\frac{n}{p^\beta} = \frac{\frac{n}{p}}{p^{\beta+1}}$$

és így $\mathfrak{A}_\varrho$ $\frac{n}{p^\beta}$-adrendű invariáns alcsoportjainak száma $\equiv 1$ (mod. p). Ezek közül ki kell zárni azokat, a melyek $\mathfrak{H}$-nak nem invariáns alcsoportjai. A kizárandók száma a III. szakasz szerint $\equiv 0$ (mod. p), a minél fogva:

$$a_\varrho \equiv 1 \text{ (mod. } p)$$

és így csakugyan, a mint bebizonyítandó volt:

$$\sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho \equiv r \equiv s \equiv 1 \text{ (mod. } p).$$

Ha $n=p^\lambda$, akkor vannak $p^{\lambda-i}$-edrendű invariáns alcsoportok és így kapjuk az előbbi tételnek következő speciális esetét.

X. *Valamely p^λ-adrendű csoportban a $p^{\lambda-i}$-edrendű alcsoportok száma* $\equiv 1 \pmod{p}$; *a $p^{\lambda-i}$-edrendű invariáns alcsoportok száma* $\equiv 1 \pmod{p}$. (FROBENIUS.)

V. A kettős modulus fogalma. (Modulus-pár.)

A komplexusokra vonatkozó alaptételből a következő tétel folyik:

I. *Ha $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ csoportok és R oly elem, hogy közte és a csoportok elemei között a szorzás definiálva van, akkor az $\mathfrak{A}R\mathfrak{B}$ komplexus különböző elemeinek száma $\frac{ab}{d}$, a hol d az*

$$R^{-1}\mathfrak{A}R,\ \mathfrak{B}$$

csoportok legnagyobb közös osztójának rendje.

A szorzás törvényéből következik az I. szakasz szerint, hogy az $\mathfrak{A}R\mathfrak{B}$ komplexus ugyanannyi különböző elemet tartalmaz, mint az

$$R^{-1}(\mathfrak{A}R\mathfrak{B}) = (R^{-1}\mathfrak{A}R)\,\mathfrak{B}$$

komplexus. És mivel $R^{-1}\mathfrak{A}R$ az $\mathfrak{A}$-val együtt csoport, tehát az alaptétel alkalmazása I.-et adja. Közvetlenül látható, hogy d még a következőleg is értelmezhető: *d jelenti az*

$$\mathfrak{A},\ R\mathfrak{B}R^{-1}$$

csoportok legnagyobb közös osztójának rendjét.

II. *Ha az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ csoportok alcsoportjai $\mathfrak{H}$-nak, akkor az*

$$\mathfrak{A}H_i\mathfrak{B},\quad \mathfrak{A}H_k\mathfrak{B}$$

komplexusoknak vagy nincs közös elemük, vagy minden elemük közös.

Ha ugyanis a két komplexusnak van közös eleme, akkor az $\mathfrak{A}$, illetőleg a $\mathfrak{B}$ csoportnak vannak oly A_i, A_k, illetőleg B_i, B_k elemei, a melyekre nézve

$$A_iH_iB_i = A_kH_kB_k$$

azonban

$$\mathfrak{A}H_i\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}A_i)H_i(B_i\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(A_iH_iB_i)\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{A}H_k\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}A_k)H_k(B_k\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(A_kH_kB_k)\mathfrak{B}$$

és így csakugyan

$$\mathfrak{A}H_i\mathfrak{B} = \mathfrak{A}H_k\mathfrak{B}.$$

Vezessük be az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ alcsoportot, mint *kettős modulust*, természetesen tekintettel lévén az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sorrendjére; akkor a következő definicziót állithatjuk fel.

III. *A H_i elem akkor és csak akkor kongruens H_k-val* (modd. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$), *ha az*

$$\mathfrak{A}H_i\mathfrak{B},\quad \mathfrak{A}H_k\mathfrak{B}$$

komplexusok elemei ugyanazok.

E definiczió a II. értelmében azonos a következővel.

III*b*. *A H_i elem akkor és csak akkor kongruens H_k-val* (modd. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$), *ha van az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ csoportnak oly A, illetőleg B eleme, melyekre nézve:*

$$H_i = AH_kB.$$

IV. *Valamely elemmel kongruens elemek egymás között is kongruensek* (modd. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$).

Ha ugyanis

$$\mathfrak{A}H_i\mathfrak{B} = \mathfrak{A}H\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{A}H_k\mathfrak{B} = \mathfrak{A}H\mathfrak{B},$$

akkor

$$\mathfrak{A}H_i\mathfrak{B} = \mathfrak{A}H_k\mathfrak{B},$$

a mivel a tétel be van bizonyítva. A III. tételt még következőleg fogalmazhatjuk.

V. *Valamely H elemmel* (modd. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) *kongruens elemek összesége az $\mathfrak{A}H\mathfrak{B}$ komplexust alkotja.*

Pl. az egységgel kongruens elemek az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ komplexust alkotják. Ez előzmények után világos, mit kelljen a *csoportnak valamely kettős modulus szerinti szétbontása* alatt érteni. Ha ugyanis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ alcsoportjai $\mathfrak{H}$-nak, akkor $\mathfrak{H}$ elemei (modd. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) bizonyos osztályokba sorozhatók. Ugyanazon osztályba tartozzanak az egymás között kongruens elemek, s így a $\mathfrak{H}$ minden eleme egy és csak egy osztályba fog kerülni. Ezt következő módon akarjuk fogalmazni.

VI. *Ha* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *alcsoportjai* $\mathfrak{H}$*-nak, akkor* $\mathfrak{H}$ *a következő módon bontható szét:*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}R_0\mathfrak{B} + \mathfrak{A}R_1\mathfrak{B} + \mathfrak{A}R_2\mathfrak{B} + \cdots \tag{1}$$

a hol

$$R_0, R_1, R_2, \ldots$$

a (modd. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) *inkongruens osztályok képviselői.*

Az (1) alatti szétbontásból alapvető fontosságú *számbeli relláczió következik. Legyenek* $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *rendjei:* n, a, b, *akkor az* $\mathfrak{A}R_i\mathfrak{B}$ *komplexus elemeinek száma* $\frac{ab}{d_i}$, *a hol* d_i *a*

$$\mathfrak{B}, \quad R_i^{-1}\mathfrak{A}R_i$$

csoportok legnagyobb közös osztójának rendje. Így tehát (1)*-ből származik a következő számbeli összefüggés:*

$$n = \sum_i \frac{ab}{d_i} \tag{2}$$

vagy még

$$\frac{n}{ab} = \sum_i \frac{1}{d_i} \tag{2b}$$

$$\frac{n}{a} = \sum_i \frac{b}{d_i}; \quad \frac{n}{b} = \sum_i \frac{a}{d_i}. \tag{2c}$$

E számbeli egyenletek alapvető jelentőségét a következő tételek fogják igazolni.

VII. *Ha* p^x p*-nek a legmagasabb hatványa (*p *törzsszám), a melylyel* n *osztható, akkor a* p^x*-edrendű alcsoportok konjugáltak.* (SYLOW.)

Ha csak egy p^x-edrendű alcsoport van, akkor a tétel igaz.

Tegyük fel, hogy több ily alcsoport van és legyen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ két tetszőleges p^x-edrendű alcsoport. Rendezzük a csoport elemeit (modd. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$), akkor

$$\frac{n}{p^x} = \sum_i \frac{p^x}{d_i}.$$

A d_i számok jelentésénél fogva világos, hogy ezek p^x osztói. Tehát

$$\frac{p^x}{d_i} = p^{x_i}, \quad x_i \leqq x$$

és így

$$\frac{n}{p^x} = \sum_i p^{x_i}.$$

Mivel azonban

$$\left(\frac{n}{p^x}, p\right) = 1,$$

kell oly k számnak lenni, melyre nézve

$$p^{x_k} = 1, \quad d_k = p^x,$$

vagyis

$$\mathfrak{B} = R_k^{-1} \mathfrak{A} R_k$$

a mi bebizonyítandó volt.

VIII. *Minden p^β ($\beta < x$)-edrendű alcsoport alcsoportja valamely p^x-edrendű alcsoportnak.* (Sylow.)

A bizonyítás az előbbihez hasonló módon eszközölhető. Legyen $\mathfrak{B}$ p^β-adrendű, $\mathfrak{A}$ p^x-edrendű alcsoport. A csoport elemeit (modd. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) rendezvén, lesz

$$\frac{n}{p^x} = \sum_i \frac{p^\beta}{d_i}$$

a hol a d_i számok p^β-nak osztói. Lesz tehát olyan k index, melyre

$$\frac{p^\beta}{d_k} = 1, \quad d_k = p^\beta$$

vagyis $\mathfrak{B}$ alcsoportja az $R_k^{-1} \mathfrak{A} R_k$ p^x-edrendű alcsoportnak.

IX. *Ha p legnagyobb hatványa, a melylyel n osztható p^x, ha továbbá két-két p^x-edrendű alcsoport közös elemeinek száma $\leqq p^\delta$ és a p^x-edrendű alcsoportok számát s-sel jelöljük, akkor:*

$$n \equiv 0 \,(\text{mod.}\, s), \quad s \equiv 1 \,(\text{mod.}\, p^{x-\delta}). \quad (\text{Sylow.})$$

Legyen $\mathfrak{A}$ valamely p^x-edrendű alcsoport; * az összes p^x-edrendű alcsoportok konjugáltak lévén (VII. tétel), a különböző alcsoportok

* Ha csak egy p^x-edrendű alcsoport van, a tétel evidens.

száma az $\mathfrak{A}'$ csoportnak indexével egyenlő. (III. szakasz III. tétel.) Ha tehát $\mathfrak{A}'$ rendje a', akkor

$$s = \frac{n}{a'}$$

vagyis

$$n \equiv 0 \,(\text{mod. } s).$$

Az $\mathfrak{A}'$ csoportnak $\mathfrak{A}$ invariáns alcsoportja, és mivel

$$\left(\frac{a'}{p^x}, p\right) = 1,$$

azért a IV. szakasz VI. tétele szerint $\mathfrak{A}'$-nek nincs más p^x-edrendű alcsoportja, mint $\mathfrak{A}$. Rendezzük most a $\mathfrak{H}$ csoport elemeit (modd. $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$). Akkor

$$\frac{n}{a'} = \sum_i \frac{p^x}{d_i}.$$

A d_i számok jelentik az

$$R_i^{-1}\mathfrak{A}R_i, \quad \mathfrak{A}' \tag{3}$$

csoportok legnagyobb közös osztójának rendjét. E rendszám p^x osztója és így a IV. szakasz VI. és az előbbi tétel szerint a (3) alatti csoportok legnagyobb közös osztója azonos az

$$R_i^{-1}\mathfrak{A}R_i, \quad \mathfrak{A} \tag{4}$$

csoportok legnagyobb közös osztójával. Ha $i=0$, akkor

$$R_0 = E$$

és ekkor a legnagyobb közös osztó maga $\mathfrak{A}$. Ha $i>0$, akkor R_i már nem eleme az $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ komplexusnak és így R_i nem kommutativ $\mathfrak{A}$-hoz, vagyis az $R_i^{-1}\mathfrak{A}R_i$ csoport most különbözik $\mathfrak{A}$-tól. Ezen megjegyzésekből tüstént látni, hogy:

$$\frac{n}{a'} \equiv 1 \,(\text{mod. } p^{x-\delta})$$

és így

$$s \equiv 1 \,(\text{mod. } p^{x-\delta}),$$

a mivel a tétel be van bizonyítva. Megjegyezzük még, hogy minden esetben

$$s \equiv 1 \pmod{p}.$$

A tétel bebizonyításában szereplő $\mathfrak{A}'$ csoport érdekes viselkedést mutat.

1. *Ha $\mathfrak{A}'$ különbözik $\mathfrak{H}$-tól, akkor $\mathfrak{A}'$ nem lehet $\mathfrak{H}$-nak invariáns alcsoportja. Sőt $\mathfrak{H}$-ban $\mathfrak{A}'$-hez csak saját elemei kommutativek.*

Az $\mathfrak{A}'$-nek csak egy p^x-edrendű alcsoportja van: $\mathfrak{A}$. Ha R kommutativ $\mathfrak{A}'$-hez, akkor mivel $R^{-1}\mathfrak{A}R$ p^x-edrendű alcsoportja az

$$R^{-1}\mathfrak{A}'R = \mathfrak{A}'$$

csoportnak, lesz

$$R^{-1}\mathfrak{A}R = \mathfrak{A},$$

tehát R kommutativ $\mathfrak{A}$-hoz is, a mivel a tétel be van bizonyítva.

Megjegyzés. Hasonló tétel áll akkor is, ha az $\mathfrak{A}$ rendje a olyan, hogy

$$\left(a, \frac{n}{a}\right) = 1$$

(V. ö. IV. szakasz VI. tétel).

A p^β-adrendű ($\beta > x$) alcsoportok számát Frobenius határozta meg először.

X. *A p^β ($\beta < x$)-adrendű alcsoportok számát s-sel jelölvén:*

$$s \equiv 1 \pmod{p} \qquad \text{(Frobenius.)}$$

Legyen

$$\beta = x - a.$$

Ha n nem törzsszámhatvány, akkor a p^x-edrendű alcsoportokra a tétel helyes, a mint az IX.-ből következik. Ha pedig $n = p^x$, akkor a p^{x-1}-edrendű alcsoportokra a tétel helyessége a IV. szakasz X. tételéből következik. Tehát feltehetjük, hogy a bebizonyítandó tétel ki van mutatva az n-nél kisebbrendű csoportokra teljesen és azonkívül a

$$p^x, p^{x-1}, \ldots, p^{x-a+1}$$

-edrendű alcsoportokra, ki fogjuk mutatni, hogy a tétel a p^{x-a}-adrendű alcsoportokra is érvényes. Legyenek az összes p^{x-a+1}-edrendű alcsoportok:

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r, \quad r \equiv 1 \pmod{p} \qquad (5)$$

és az összes $p^{x-\alpha}$-adrendű alcsoportok:

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_s. \tag{6}$$

Minden $\mathfrak{A}$ csoport a III. szakasz IX. szerint tartalmaz $\mathfrak{B}$ csoportot és fordítva minden $\mathfrak{B}$ csoporthoz az V. szakasz VIII. és III. szakasz XIII. szerint találunk oly $\mathfrak{A}$ csoportot, mely őt, mint alcsoportot, tartalmazza. Tartalmazzon $\mathfrak{A}_\varrho$ a (6) alattiakból a_ϱ számú alcsoportot, $\mathfrak{B}_\sigma$ pedig forduljon elő b_σ számú (5) csoportban. Akkor

$$\sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma. \tag{7}$$

Ebből az egyenletből s-re fogunk következtetni. Először is a IV. szakasz X. szerint

$$a_\varrho \equiv 1 \ (\text{mod.}\, p),$$

tehát

$$\sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho \equiv r \ (\text{mod.}\, p),$$

de

$$r \equiv 1 \ (\text{mod.}\, p)$$

és így

$$\sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho \equiv 1 \ (\text{mod.}\, p), \quad \sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma \equiv 1 \ (\text{mod.}\, p). \tag{8}$$

Határozzuk most meg b_σ értékét. Legyenek az összes (5) csoportok, melyekben $\mathfrak{B}_\sigma$ előfordul:

$$\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b, \ldots \tag{9}$$

Ezek mindegyikének $\mathfrak{B}_\sigma$ a III. szakasz XI. szerint invariáns alcsoportja. Ha tehát a (9) csoportok legkisebb közös többesét $\mathfrak{G}$-vel jelöljük, akkor $\mathfrak{B}_\sigma$, $\mathfrak{G}$-nek invariáns alcsoportja. A (9) csoportok pedig és csak ezek, nem mások, mint a

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_\sigma}$$

osztálycsoport p-edrendű alcsoportjai. A $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}_\sigma}$ rendje n-nél kisebb lévén, tételünket reá már alkalmazni lehet. S így a (9) csoportok száma, vagyis

$$b_\sigma \equiv 1 \ (\text{mod.}\, p).$$

Ennek folytán

$$\sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma \equiv s \equiv 1 \pmod{p},$$

a mivel a tétel be van bizonyítva.*

Megjegyzés. Ha n törzsszámhatvány, akkor a tétel összeesik a IV. szakasz X. tételével, a melyet azonban a bebizonyításnál részben felhasználtunk.

XI. *Ha a csoport rendje*

$$n = ab, \quad (a, b) = 1$$

és a csoportnak van a-adrendű invariáns alcsoportja, akkor az ap^β-adrendű alcsoportok száma $\equiv 1 \pmod{p}$.

Legyen $\mathfrak{A}$ az a-adrendű invariáns alcsoport. (A IV. szakasz VI. szerint csak egy ilyen van.) Ha már most $\mathfrak{G}$ valamely ap^β-adrendű alcsoport, akkor a IV. szakasz VIIIb. szerint $\mathfrak{G}$ tartalmazza $\mathfrak{A}$-t s így a $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ csoport p^β-adrendű alcsoportja $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}}$-nak.

A X. alkalmazása már most a keresett tételt szolgáltatja:

XII. *Ha a csoportnak van $\frac{a}{p^\beta}$-edrendű invariáns alcsoportja, akkor az a-adrendű alcsoportok száma* $\equiv 1 \pmod{p}$.

Az előbbihez hasonló módon bizonyítható be.

XIII. *Legyen ismét:*

$$n = ab, \quad (a, b) = 1.$$

Ha a csoportnak több mint egy $\frac{a}{p}$-adrendű invariáns alcsoportja van, akkor az $\frac{a}{p^\beta}$-adrendű alcsoportok száma $\equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \pmod{p}$.

Legyen $\mathfrak{G}_1$ és $\mathfrak{G}_2$ két $\frac{a}{p}$-adrendű invariáns alcsoport. A kom-

---

* FROBENIUS eredeti levezetése feltételezi a következő VI. szakasz tárgyalásait, azonban független a SYLOW-féle tételtől. BURNSIDE (The Theorie of Groups of finite Order) is közölt oly levezetést, mely a VI-ik szakaszt nem tételezi fel. Mindhárom levezetésnek lényeges részét az a_ϱ és b_σ segítségével való a FROBENIUS-féle kettős megszámlálás képezi. BURNSIDE levezetésében a IV. szakasz X. tételéből indul ki, de nem használ teljes indukcziót.

plexusokra vonatkozó tételekből folyik, hogy $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ szintén invariáns alcsoport. Legyen

$$\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{A},$$

akkor $\mathfrak{A}$ rendje

$$\frac{a}{p}\,\frac{a}{p}\,\frac{1}{d}$$

mivel azonban

$$n \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{a}{p}\,\frac{a}{p}\,\frac{1}{d}\right)$$

$$\frac{a}{p} \equiv 0 \text{ (mod. } d), \quad (a, b) = 1$$

következik, hogy $\mathfrak{A}$ rendje

$$\frac{a}{p}\cdot\frac{a}{p}\,\frac{1}{d} = a.$$

Tehát a IV. szakasz VII. szerint minden $\frac{a}{p^\beta}$-adrendű alcsoport alcsoportja $\mathfrak{A}$-nak és indexe $\mathfrak{A}$-ra vonatkozólag p^β s így a tétel X-ből folyik. Áttérünk olyan tételek tárgyalására, a melyek mutatják, hogy bizonyos esetekben már az alcsoportnak indexe biztosítja annak *invariáns* voltát. A tételek Frobenius-tól származnak.

XIV. *Ha*

$$n = ab$$

és a törzstényezői nem kisebbek magánál a b számnál, akkor minden a-adrendű alcsoport invariáns alcsoport.

Legyen $\mathfrak{A}$ valamely a-adrendű alcsoport. Rendezzük $\mathfrak{H}$ elemeit (modd. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$). Akkor

$$\frac{n}{a} = b = \sum_i \frac{a}{d_i}$$

a hol d_i az

$$\mathfrak{A}, \quad R_i^{-1}\mathfrak{A}R$$

csoportok legnagyobb közös osztójának rendje. Mivel $R_0 = E$, következik, hogy

$$d_0 = a,$$

tehát

$$b = 1 + \frac{a}{d_1} + \frac{a}{d_2} + \cdots$$

A b szám azonban nem nagyobb a tetszőleges törzstényezőjénél, kell tehát, hogy

$$d_1 = d_2 = \cdots = a$$

legyen, a minek következtében az

$$\mathfrak{A}, \quad R_i^{-1}\mathfrak{A}R_i$$

csoportok megegyeznek s így $\mathfrak{A}$ invariáns alcsoport.

Megjegyzések.

1. E tételből, mint speciális eset, következik a III. szakasz XI. tétele.

2. Ha a törzsszámhatvány és $(a, b) = 1$, akkor a megfelelő speciális tétel már az V. szakasz IX-ből következik.

3. Végre igen alárendelt speciális eset az, a mely szerint, ha valamely alcsoport indexe 2, akkor az mindig invariáns alcsoport. Ezt a speciális esetet direkt úton be lehet bizonyítani annak az eljárásnak segítségével, a melyet pl. a számelméletben a quadratikus maradékok és nemmaradékok osztályozásánál követünk.

XV. *Legyen*

$$n = abc$$

a-nak törzstényezői ne legyenek c-nél kisebbek, c pedig legyen b törzstényezőinél nagyobb. Ha a csoportnak van ab-edrendű $\mathfrak{G}$ alcsoportja, akkor $\mathfrak{G}$-nek van oly alcsoportja, a mely $\mathfrak{H}$-nak invariáns alcsoportja és a melyek rendje a-nak többszöröse.

Ha

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

akkor $\mathfrak{G}$-nek van $p_i^{\alpha_i}$-adrendű alcsoportja. Legyen $\mathfrak{P}_i$ ilyen. Be fogjuk bizonyítani, hogy $\mathfrak{G}$ az összes $\mathfrak{P}_i$-vel konjugált csoportokat tartalmazza. Rendezzük ugyanis $\mathfrak{H}$ elemeit (modd. $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{G}$), akkor lesz

$$\frac{n}{ab} = c = \sum_i \frac{p_i^{\alpha_i}}{d_i}.$$

Mivel

$$d_0 = p_i^{\alpha_i}$$

kell, hogy

$$d_1 = d_2 = \cdots = p_i^{\alpha_i}$$

legyen és így $\mathfrak{G}$ csakugyan tartalmazza $\mathfrak{P}_i$-t és összes konjugáltjait, tartalmazza tehát ezeknek legkisebb közös többesét. Jelöljük ezen csoportot $\mathfrak{A}_i$-vel; $\mathfrak{A}_i$ származásánál fogva invariáns alcsoportja $\mathfrak{H}$-nak, rendje $p_i^{a_i}$-vel osztható. Ugyancsak tartalmazni fogja $\mathfrak{G}$ az

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$$

csoportok mindegyikét s így ezeknek legkisebb közös többesét is. Legyen ezen csoport $\mathfrak{A}$. De $\mathfrak{A}$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{H}$-nak, rendje a-val osztható, mivel tételünk be van bizonyítva.

Bauer Mihály.

ÚJABB KUTATÁSOK A FÖLDMÁGNESSÉG ELMÉLETÉBEN.

(Előadás a Math. Phys. Társulat 1899. decz. 7-iki ülésén.)

A földmágnességi tüneményeknek, mint egésznek mathematikai vizsgálatát, Gaussnak köszönhetjük.[1] Ő a földmágnesség potentiáljának soralakját azon feltétel alapján számítja ki, hogy a szóban levő erők székhelye a Föld belsejében van. Számításainak az észlelési adatokkal való egybevetése útján az akkori mérések pontosságán belül fekvő különbségeket talál észlelés és számítás között, a mi a posteriori bizonyítékát szolgáltatja annak, hogy az előbbi feltétel helyes. Gauss ideje óta a földmágnességi mérések úgy mennyiség, mint minőség tekintetében nagy haladást tettek. Várható volt tehát, hogy ha a potentiál soralakját ezen jobb és a Föld felületének nagy részén eloszló észlelési adatokkal hasonlítjuk össze, úgy az észlelés és számítás közti különbség kisebbedni fog és nem fogja meghaladni azon határokat, melyeket a pontosabb mérőmódszerek pontossági foka megenged. E remény nem teljesedett. Sem Petersen, sem Erman és Petersen,[2] sem Quintus Icilius[3] új számításai nem mutattak lényeges haladást e tekintetben. De nem mutatkozik e haladás Neumayer legújabb számításainál sem, melyek az ez idő szerint legjobb és legteljesebb észlelési anyag alapján végeztetett.[4] Közelfekvő tehát a gondolat, az

[1] Gauss Werke. Vol. V. pag. 121.

[2] Die Grundlagen der Gauss'schen Theorie und die Erscheinungen des Erdmagn. i. J. 1829. Berlin 1874.

[3] «Aus dem Archiv d. deutschen Seewarte». IV. Jahrg. 1881. Nr. 2.

[4] Verhandlungen des VIII. deutschen Geographentages. Berlin 1889.

elméleti alapot vizsgálni, melynek alapján e számítások végeztettek, és ha szükséges, ezen változtatni. Ezt tette SCHMIDT ADOLF.[1]

GAUSS számításainál a következő két suppositió szerepel mint olyan, melyek okozhatják azt, hogy az elmélet nem simul teljesen az észlelési adatokhoz. Először a Föld gömbalakúnak tételeztetett fel, másodszor felvétetett, hogy a földmágnességi tüneményeket okozó erők székhelye tisztán a Föld belsejében keresendő. Az első suppositió elhagyása és helyette a Földnek, mint forgási ellipszoidnak behozatala nem okoz semmi nehézséget és a potentiál soralakjában néhány a Föld méreteitől függő állandó lép fel. Mélyebb megfontolást igényel a második feltétel. Egész általánosságban a következő kérdésekkel állunk szemben:

1. Van-e földmágnességi tüneményeket előidéző erőknek a Föld felületén egyértékű potentiáljuk.

2. Ha van, úgy ezen erők székhelye a Föld belsejében vagy azon kívül van-e, illetőleg az erőknek mely törtrésze ered a Föld belsejéből és melyik a légkörbeli székelő forrásból.

3. Ha nincs egyértékű potentiál a Föld felületen, vagy ha az erők csak egy részének van egyértékű potentiálfüggvényük, hogyan kell képzelnünk azon erőket, melyeknek nincs egyértékű potentiálfüggvényük a Föld felületén, és mit tudunk azok létezéséről?

E kérdések megoldására rendelkezésünkre állanak a földmágnességi erő x, y, z[2] összetevői a Föld mindazon helyeiről, a hol mérések történtek. Ha van a földfelületen ezen erőknek potentiáljuk, és ezt V-vel jelöljük, úgy:

$$X = \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial u} \qquad Y = -\frac{1}{R\sin u}\frac{\partial V}{\partial \lambda} \qquad Z = +\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R}$$

hol R a Föld sugara, u, λ a hely földrajzi szélessége és hossza.[3]

---

[1] «Aus dem Archiv der deutschen Seewarte». 12. Jahrg. 1889. Nr. 3. és «Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss.» II. Cl. XIX. Bd. I. Abth.

[2] A positiv x tengely az északi pólus felé, az y tengely a parallel kör érintőjében kelet felé, a z tengely az xy síkra merőlegesen lefelé irányul.

[3] A megfontolásokat gömbalakú Földre teszszük meg; forgási ellipszoidnál csak a számítás technikai része változik.

Az első két egyenletből következik, ha

$$\int_0^u X du = U \quad \text{és} \quad -\int_0^\lambda Y \sin u d\lambda = W,$$

$$\frac{V}{R} = U = W + \psi(u)$$

hol $\psi(u)$ az U-nak azon része, mely λ-től független. Ha a Föld minden pontjában ismernők az erőösszetevőket, úgy ezen integrálok mechanikai quadraturával, vagy planimetrikus úton kiszámíthatók volnának. Mivel ily részletesen nem ismerjük Földünk mágnesi állapotát, SCHMIDT az erőösszetevőket annak analogiájára, mint azt GAUSS a potentiálfüggvénynyel tette, egymástól független, gömbfüggvények szerint haladó sorba fejti, és az ezekben szereplő állandókat az észlelési adatokból határozza meg. Megállapíttatván X, Y és $\psi(u)$ alakja, a fennebbi integrálok kiszámíthatók. A számításokból kitűnik, hogy a fennebbi egyenlőség nem áll fenn szigorúan, az eltérés azonban nem nagy. Ebből következik, hogy az erők tulnyomó részének van potentiálfüggvénye; hogy mekkora részüknek, ennek eldöntésénél bizonyos fokú önkény lép be számításainkba. Azon erőket, melyeknek nincs potentiálfüggvényük az $U - W - \psi(u)$ különbség jellemzi.

Azon V potentiálfüggvényt, mely a földmágnességi (általában a Földben és a légkörben székelő) erők egy és pedig túlnyomó részéhez tartozik, azon megfontolás alapján határozhatjuk meg, hogy a földmágnességi erők lehető nagy részének legyen potentiálja. Tehát például úgy, hogy a V függvényből levezethető és az észlelt erőösszetevők eltéréseinek négyzetösszege minimum legyen. E követelés

$$\Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x} - X\right)^2 = \text{min.} \quad \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial y} - Y\right)^2 = \text{min.}$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial z} - Z\right)^2 = \text{min.}$$

feltételekhez vezet. Vagy megállapíthatjuk azt, hogy minden pontban a V és az U, illetve $W + \psi(u)$ közti eltérések négyzeteinek összege legyen minimum. Tehát

$$(V-U)^2+(V-W-\psi(u))^2=\min.$$

a mi azon eredményhez vezet, hogy $V=\frac{1}{2}[U+W+\psi(u)]$.

Schmidt az utóbbi utat választja. Meg lévén határozva V, mint azon földmágnességi erők potentiálja, melyek ilyennel birnak, a Földben és azon kívül székelő erők különválasztása nem okoz nehézséget. E czélra a Z komponens veendő tekintetbe, a mint azt már Gauss alapvető értekezésében kifejtette.*

Azon erők, melyek a Föld felületen egyértékű potentiálfüggvénynyel nem birnak, az $U-W-\psi(u)$ kifejezéssel jellemezvék. Ilyen erők mint vertikális áramok képzelendők, melyek a Földből a légkörbe, vagy megfordítva haladnak. Ismeretes, hogy az elektromos áramok elektromágneses potentiálja a tér valamely pontjában nem egyértékű, hanem függ azon úttól, melyen a mágneses tömeg a tér ama pontjára jutott. Ha i az áramkörben mozgó áram intensitása, úgy $\pm 4\pi i$-vel változik a potentiál, ha az egységnyi mágneses tömeg oly zárt görbét fut be, mely az áramkör síkját egyszer keresztül szúrja. Mivel pedig a potentiál változása egyenlő a végzett munkával, azért $\pm 4\pi i$ egyszersmind azon munka, melyet az elektromágneses erők végeznek, vagy melyet azok ellenében végeznünk kell, ha az egységnyi mágneses tömeg az említett módon önmagában zárt útat ír le. Ha ez út számára a Föld felületén oly elemi négyszöget választunk, melyek csúcspontjai (u, λ), $(u, \lambda+d\lambda)$, $(u+du, \lambda+d\lambda)$, $(u+du, \lambda)$, úgy

$$\pm 4\pi i=\frac{\partial X}{\partial \lambda}+\frac{\partial(Y\sin u)}{\partial u};$$

X, Y általános alakja sorkifejezésben meg lévén határozva, i kiszámítható.

Ekként meg lévén állapítva a V, illetve a Z erőkomponens segélyével a Földben es a Földön kívül székelő erők potentiálfüggvénye V_i és V_a, nemkülönben az i is, Schmidt kutatásainak főeredményét a következő tételben foglalja össze: A földmágnességi

* l. c. pag. 171.

erők oly okokra vezetendők vissza, melyeknek székhelye túlnyomólag a Föld belsejében keresendő, de nem kizárólag. Az erőknek körülbelül $^1/_{40}$-része a Földön kívül fekvő okokra vezetendő vissza; egy másik, az utóbbinál valamivel nagyobb rész vertikális áramok jelenlétét sejteti; ez utóbbiakból egy négyzetkilométer területre átlagban $^1/_6$ Ampère jut.

A Földön kívül fekvő okokból származó erők, melyek a Föld felületén egyértékű potentiálfüggvénynyel birnak, szintén elektromos áramok alakjában képzelhetők, melyek Földünk körül a légkörben keringenek, és pedig keletről nyugatra.

Schmidt számadatai, daczára annak, hogy az ez idő szerint legteljesebb és legjobb észlelési anyag alapján végeztettek, bizonytalanok. Mert bár az ő potentiálsora az észleléseket sokkal jobban állítja elő elődeinél, a belőlök a különböző irányú elektromos áramok létezésére vont következtetések oly számadatokon alapszanak, melyek az észlelési anyag megengedhető hibáitól eredhetnek és nagyságrendjük sem különbözik ezekéitől.

Más kutatások azonban ezen elektromos áramok létezését igazolni látszanak. Így Bauer[1] $+60°$ és $-60°$ földrajzi szélességek között kiszámította a legujabb észlelési adatok alapján 5—5 fok távolságu parallelkörök által bezárt gömbzónákban levő vertikális áramokat és míg egyrészről azok átlagos nagyságrendjét egyezőknek találta a Schmidt-től megadott értékkel, másrészt az áramgörbékre oly vonalakat nyert, melyek nagyjában hasonlítanak azon áramgörbékhez, melyeket Hertz talált egy a forgási tengelye mentén egyenletesen mágnesezett gömb által a környezetben indukált áramokra.[2] Liznar az osztrák-magyar birodalomban a 90-es években végzett földmágnességi mérések eredményeit az észlelési helyek magassága szerint csoportosította és azt találta,[3]

---

[1] Terrestrial magnetism. Vol. II. Nr. 1. pag. 11.

[2] Hertz, Gesam. Abh. Vol. I. p. 115. és Schuster: Electric currents induced by rotating magnets Terr. Magn. Vol. I. Nr. 1. pag. 1.

[3] Über die Änderung der erdmagnetischen Kraft mit der Höhe Sitzber. d. kais. Akad. d. Wiss. in Wien. Bd. CVII. Abth. II*a*. — és Met. Zeitschr. Mai 1898.

hogy a mágneses elemeknek változása növekedő magassággal nem követi azon szabályt, mely a Gauss-féle elméletből következnék, nevezetesen a nyugati erőkomponens a magassággal nő, a Gauss-féle theoria szerint fogynia kellene. A többi erőkomponensek ugyan fogynak, de háromszor gyorsabban, mint ezen elmélet követeli. E tény könnyen magyarázható a földfelülettel parallel haladó elektromos áramokkal. Ezen, mindeddig csak hypothetikus áramokra vonatkozó eredmények pedig a légköri elektromosság eddig ismeretes tüneményeivel szép összhangzásba hozhatók.[1] A külső hatók létezését különben Schuster és Berold vizsgálatai a földmágnességi elemek napi menetére vonatkozólag is bizonyítják.[2]

Míg így egyrészről a földmágnességi tünemények mathematikai vizsgálata Gauss és Schmidt dolgozatai által bizonyos befejezettséget nyert, másrészről a jelenségek physikai magyarázata még korántsincs elérve. És mint minden komplikált physikai feladatnál, úgy itt is a feladatnak egyszerűbb feladatokra való felbontása az, mely — úgy látszik — legjobban czélhoz vezet. A feladatnak ily felbontását eszközli Bauer,[3] midőn vizsgálja a Föld mágneses tengelye mentén egyenletesen mágnesezett Földgömb erőösszetevőit a Föld felületen azon számadatok alapján, melyek Schmidt számításaiból adódnak. Összehasonlítva ezen erőösszetevőket a tényleg észleltekkel, egy erőteret nyer, melynek potentiálgörbéi feltűnő hasonlatosságot mutatnak a hőmérséklet évi és anomálgörbéivel. Feltűnő jelenség, hogy ezen erőtér pólusai mindkét félgömbön körülbelül a 40° parallelkör mentén helyezkednek el, tehát ép azon vidéken, mely mint barometrikus maximum, az általános légmozgás szempontjából is oly nevezetes szerepet játszik.

A földmágnességi tünemények teljes physikai magyarázatától még távol vagyunk. Oka ennek egyrészt az észleléseknek a Föld felületén való nem elég egyenletes eloszlása, másrészt azoknak még nem teljesen kielégítő pontossága.

---

[1] l. Trabert: Meteor. Zeitschrift. Nov. 1898.

[2] Phil. Trans. of the Royal Society of London. Vol. 130. A. pag. 467. és Sitzber. d. kön. preuss. Akad. d. Wiss. Jahrg. 1897. Jan.-Juni pag. 414.

[3] Terrestrial magnetism. Vol. IV. Nr. 1. pag. 33.

Különösen a tengerekről vannak igen hiányos adataink. Megnehezíti a kutató munkáját az is, hogy az observatoriumok kiadványaiban az adatok legtöbbnyire oly alakban közöltetnek, melyekből az elméleti kutatások czéljainak jobban megfelelő adatok (X, Y, Z összetevők) még előbb kiszámítandók. Mind e hiányok, melyek a földmágnesség physikai elméletének tökéletesitését késleltetik, égető szükséggé tették a kutatásnak bizonyos internaczionális jelleget adni. Így jött létre 1896-ban a párizsi nemzetközi meteorológiai kongresszuson az állandó nemzetközi bizottság földmágnességre és légköri elektromosságra; és 1898-ban a nemzetközi földmágnességi kongresszus, mely főkép azon kérdések megvitatását tűzte czéljául, melyek csak internaczionális együttműködéssel oldhatók meg.*

Steiner Lajos.

---

* Terrestrial magnetism. September 1898.

A TESTEK HALMAZÁLLAPOTAIRÓL.

(Hatodik és befejező közlemény.)

III. RÉSZ.

Elméleti fejtegetések.

28. §. *Van der Waals állapotegyenlete.*

A Boyle-Mariotte és Gay-Lussac törvények egyesitéséből származott

$$pv = RT$$

összefüggés (41. lap) a légnemű testeknél, még ha azok nincsenek is telitett állapotban, teljes szigorúsággal nem érvényes. Ezen eltérés okait kutatva, Van der Waals theoretikus megfontolások alapján, a következő eredményre jutott.* A kinetikus gázelmélet szerint a gázok molekulákból állanak, melyek bizonyos térfogattal birnak és egymásra vonzást gyakorolnak. Midőn tehát a gáz térfogatát kisebbitjük, nemcsak p külső erő működik, hanem a molekulák vonzó ereje is. Ezen vonzó erő arányos a vonzó és vonzott molekulák számával, tehát, egyensúlyt feltételezve, a térben foglalt molekulák számának négyzetével. A molekuláknak pedig, melyeket ez egyensúlyi állapot miatt legegyszerűbben egyenlő nagyságú és tömegű rugalmas golyócskáknak gondolunk, száma arányos a gáz sűrűségével, tehát forditva arányos a térfogattal; így a vonzó erő forditva arányos a térfogat (v) négyzetével, és ha

---

* Van der Waals, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes I. — M. O. Meyer, Die kin. Theorie der Gase, 1899. §§. 6—11; 44.

a állandó szám, egyenlő $\frac{a}{v^2}$-el. A p külső erő s a molekulák $\frac{a}{v^2}$ vonzó ereje egyenlő értelemben hatnak s így a fenti kifejezésben p helyett $p+\frac{a}{v^2}$ teendő. Az összenyomásnál továbbá nem kisebbítjük az egész v térfogatot, mert a molekuláknak maguknak is van térfogatuk, tehát v-ből valamit le kell vonni, s ha ezt a részt b-vel jelöljük, akkor *a gázok és nem telített gőzök állapotegyenletének alakja:*

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT.$$

Az elméleti okoskodásokra, melyek különösen a és b jelentésével és számbeli meghatározásával foglalkoznak, nem terjeszkedhetünk ki. A légnemek különbözősége nem jön tekintetbe, mivel Avogadro törvénye szerint egyenlő nyomás és hőmérséklet esetében az egyenlő térfogatban levő molekulák száma minden gáznál egyenlő.*

Andrews-nak a kritikus állapotokról tett felfedezéséből kiindulva, Van der Waals állapotegyenletének érvényességét a folyadékokra is kiterjesztette. Az egyenlet alapján megszerkesztett isothermák a határesetekben megadják a tényleges viszonyokat. Az egyenletből u. i. a nyomásra:

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}$$

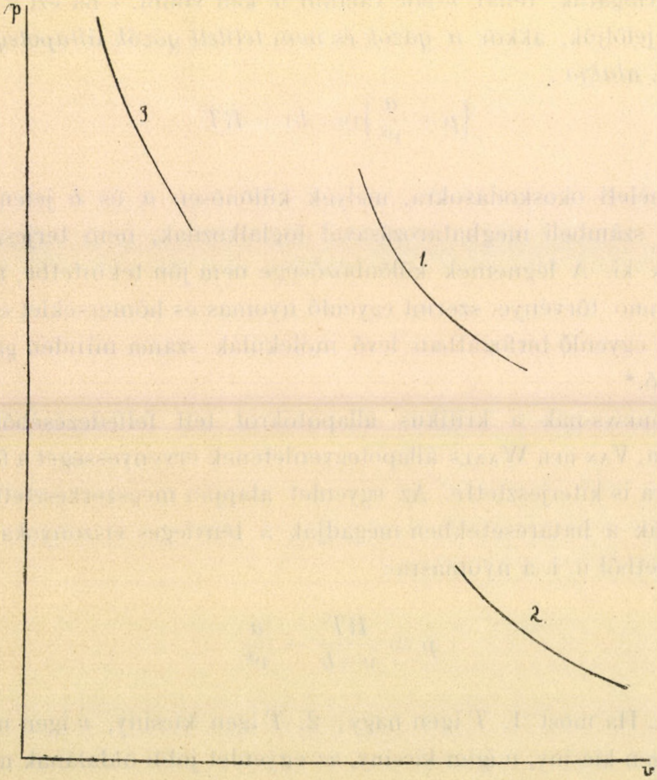
adódik. Ha most 1. T igen nagy; 2. T igen kicsiny, v igen nagy; 3. T igen kicsiny, v igen kicsiny, az egyenlet jobb oldalának második tagja mindig elhanyagolható az elsővel szemben s az egyenlet:

$$p=\frac{RT}{v-b}$$

hyperbola egyenlete lesz (27. ábra). A kritikus hőmérséklet alatt a konstruált görbe nem felel meg a tényleges viszonyoknak: a nem

* Avogadro, 1811; Ostwald, Klassiker Nr. 8.

telített gőznek s a folyadéknak menetét megadja, de az elgőzítés, illetőleg folyósodás proczessusát nem (28. ábra). Ezen folyamatnak u. i. a tapasztalás szerint az A_1A_2 egyenes felel meg a graphikonban, míg a formula az $A_1B_1B_2A_2$ görbét adja; B_1B_2 közt a nyomás nő a térfogattal, a mi a tapasztalással ellenkezik. Azt mondjuk,



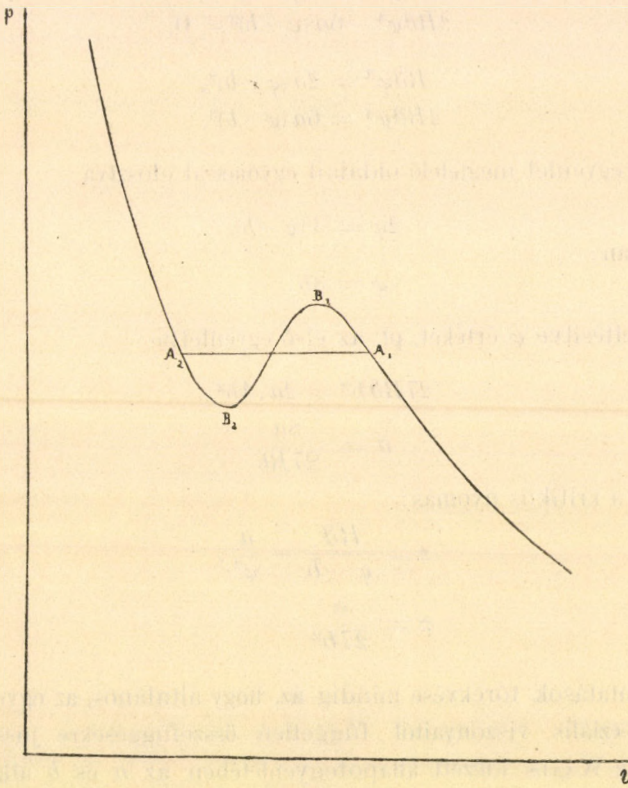
27. ábra.

hogy ez labilis egyensúlynak felel meg, mely a bekövetkezhető legkisebb zavar folytán stabilis állapotba jut; a görbe ezen abnormális részét a késleltetett lecsapódás (túlhevítés; A_1B_1) s a késleltetett forrás (B_2A_2) abnormális jelenségei valósítják meg a tapasztalatban.

Ezen görbe alapján a kritikus pont jellemzőit fogjuk meghatározni. A nyomásnak B_1-ben maximuma, B_2-ben minimuma van, tehát a differencziálszámítás szerint:

$$\frac{dp_1}{dv} = 0 \quad (B_1 \text{ pontra nézve}),$$

$$\frac{dp_2}{dv} = 0 \quad (B_2 \text{ pontra nézve}).$$



28. ábra.

A kritikus pontban B_1 és B_2 egybeesnek s itt a görbének inflexiós pontja van, tehát

$$\frac{d^2p}{dv^2} = 0.$$

A kritikus pont B helyére nézve tehát a következő két egyenlet érvényes:

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = 0,$$

$$\frac{d^2p}{dv^2} = \frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6a}{v^4} = 0.$$

Behelyettesítve a kritikus hőmérséklet (ϑ) és térfogat (φ) értékeit:

$$-R\vartheta\varphi^3 + 2a(\varphi-b)^2 = 0,$$

$$2R\vartheta\varphi^4 - 6a(\varphi-b)^3 = 0,$$

vagy:

$$R\vartheta\varphi^3 = 2a(\varphi-b)^2,$$

$$2R\vartheta\varphi^4 = 6a(\varphi-b)^3,$$

s a két egyenlet megfelelő oldalait egymással elosztva:

$$2\varphi = 3(\varphi-b),$$

a honnan:

$$\varphi = 3b.$$

Behelyettesítve φ értékét, pl. az első egyenletbe:

$$27R\vartheta b^3 = 2a \,.\, 4b^2,$$

$$\vartheta = \frac{8a}{27Rb}.$$

Ezután a kritikus nyomás:

$$\pi = \frac{R\vartheta}{\varphi-b} - \frac{a}{\varphi^2},$$

$$\pi = \frac{a}{27b^2}.$$

A kutatások törekvése mindig az, hogy általános, az egyes testek speciális viszonyaitól független összefüggésekre jussanak. Van der Waals idézett állapotegyenletében az a és b állandók az egyes testek molekuláinak speciális tulajdonságaitól függnek. Minden légnemű és folyékony testre egyaránt érvényes összefüggést nyerünk, ha az a és b állandókat ki tudjuk küszöbölni. Van der Waals ezt úgy éri el, hogy a különböző testeknél összehasonlításul a kritikus pontból indul ki s *a hőmérsékleteket, nyomásokat, térfogatokat a kritikus hőmérséklet, nyomás és térfogat részeiben fejezi ki*; tehát:

$$p = e\pi, \quad T = m\vartheta, \quad v = n\varphi,$$

a hol:

$$e = \frac{p}{\pi}, \quad m = \frac{T}{\vartheta}, \quad n = \frac{v}{\varphi},$$

a *redukált* nyomás, hőmérséklet és térfogat. Az állapotegyenletbe ezen értékeket helyettesítve:

$$\left(e\pi + \frac{a}{n^2\varphi^2}\right)(n\varphi - b) = Rm\vartheta;$$

π, φ és ϑ kiszámított értékeinek helyettesítése után:

$$\left(\frac{ea}{27b^2} + \frac{a}{9n^2b^2}\right)(3nb - b) = \frac{8am}{27b};$$

a rövidítéseket elvégezve:

$$\left(e + \frac{3}{n^2}\right)(3n - 1) = 8m.$$

Ezen egyenletben csak oly számbeli állandók szerepelnek, melyek függetlenek az anyag speczialis tulajdonságaitól s így *e redukált egyenlet* is általános érvényességű.

29. §. *A telített gőz nyomása.*

A II. részben szóltunk már Van der Waals azon következtetéséről, mely szerint *a telített gőz redukált nyomásának és redukált hőmérsékletének viszonya független az anyagtól* (VIII. k. 395. lap).

Mielőtt e tétel elméleti megokolásába bocsájtkozhatnánk, szükséges lesz a mechanikai hőelmélet egyes tételeit összefoglalni.

A mechanikai hőelmélet első főtétele az energia megmaradásának elvét alkalmazza a hőjelenségekre. Legyen adva valamely anyagi rendszer s vezessünk ehhez dQ melegquantumot; ezáltal megváltozik a test H hőtartalma dH-val, a test belső részeinek helyzetváltozására dL_i munka s a térfogatváltozás következtében a külső felületre ható légnyomás ellenében dL_e munka végeztetett; az energia megmaradásának elve szerint:

$$dQ = dH + dL_i + dL_e.$$

Bevezetjük a *belső energia* fogalmát, mely alatt azon energiát értjük, mely a test belső részeihez kapcsolódik; ha ennek változása dE_i, akkor:

$$dE_i = dH + dL_i,$$

továbbá, ha a test felületére ható külső nyomás p és a térfogat a dQ meleg közlése által dv-vel változott, akkor a külső munka:

$$dL_i = pdv;$$

tehát az első főtétel alakja:

$$dQ = dE_i + pdv.$$

A belső energia (E_i) általában függvénye v-nek és T-nek, tehát:

$$dE_i = \frac{\partial E_i}{\partial v} dv + \frac{\partial E_i}{\partial T} dT.$$

Kisérletileg is kitünt, hogy a *belső energia csak a hőmérsékletnek függvénye* s így:

$$dE_i = \frac{dE_i}{dT} dT,$$

tehát az első főtétel alakja:

$$dQ = \frac{dE_i}{dT} dT + pdv.$$

Altalában Q is függvénye v-nek és T-nek:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial T} dT + \frac{\partial Q}{\partial v} dv$$

s a két egyenlet összevetéséből:

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{\partial E_i}{\partial T} = C_v,$$

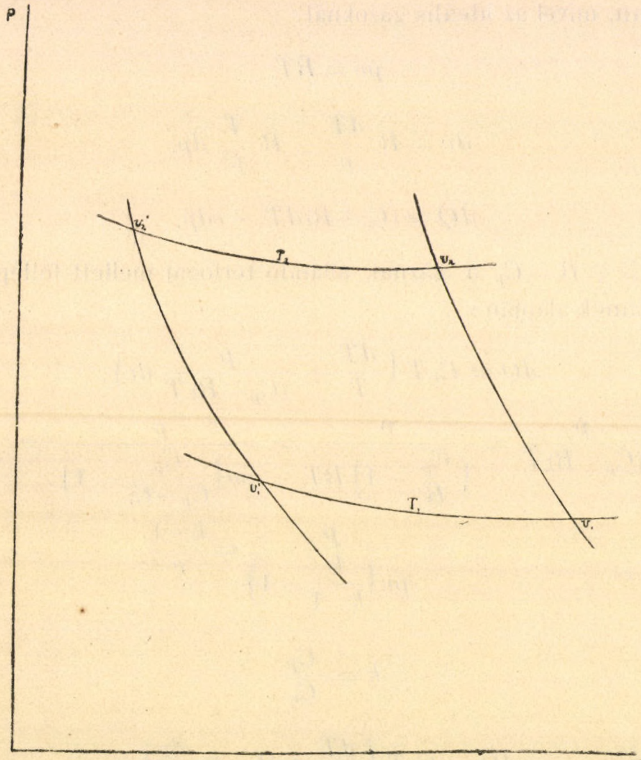
$$\frac{\partial Q}{\partial v} = p.$$

A főtétel alakja most már:

$$dQ = C_v dT + pdv,$$

a hol C_v a gáznak állandó térfogat mellett föllépő fajhője.

Ha a testet bizonyos változásoknak vetjük alá, ugy azonban, hogy e változások befejezése után a test eredeti állapotába jusson, akkor *körfolyamatot* végeztünk vele; ha ugyanezt a körfolyamatot megfordított sorrendben végezve, a test ismét eredeti állapotába jut, akkor *megfordíthatónak* nevezzük a körfolyamatot. A leg-



29. ábra.

egyszerűbb körfolyamatok egyike, mely két adiabatikus és két isothermikus változásból áll (Carnot-féle körfolyamat). Egy ily változás mentén vizsgáljuk meg a felvett melegquantumnak s a hőmérsékletnek viszonyát. A test adiabatikusan (tehát Q állandó) változik $v_1 v_2$ és $v_2' v_1'$ utakon, isothermikusan (tehát T állandó) $v_2 v_2'$ és $v_1' v_1$ utakon (29. ábra).

1. Az adiabatikus változások.

Az első főtétel:

$$dQ = C_v dT + pdv,$$

a mi így irható:

$$dQ = C_v T\left(\frac{dT}{T} + \frac{p}{C_v T}\,dv\right).$$

Azonban, mivel az ideális gázoknál:

$$pv = RT,$$

tehát:

$$dv = R\,\frac{dT}{p} - R\,\frac{T}{p^2}\,dp,$$

s így:

$$dQ = (C_v + R)\,dT - vdp,$$

a hol $C_v + R = C_p$ a gáznak állandó térfogat mellett föllépő fajhője. Ennek alapján:

$$dQ = C_v T\left(\frac{dT}{T} + \frac{p}{(C_p - R)\,T}\,dv\right),$$

$$\frac{p}{(C_p - R)\,T} = \frac{p}{\left(\frac{C_p}{R} - 1\right)RT} = \frac{p}{pv\left(\frac{C_p}{C_p - C_v} - 1\right)} =$$

$$= \frac{p}{pv\left(\frac{k}{k-1} - 1\right)} = \frac{k-1}{v}$$

a hol

$$k = \frac{C_p}{C_v}.$$

Így:

$$dQ = C_v T\left(\frac{dT}{T} + (k-1)\,\frac{dv}{v}\right),$$

$$\frac{dQ}{C_v T} = \frac{dT}{T} + (k-1)\,\frac{dv}{v} = d\log T + d\log(v^{k-1}).$$

Mivel a tágulás adiabatikus, $dQ = 0$, és így:

$$d\log T + d\log(v^{k-1}) = d\log(Tv^{k-1}) = 0,$$

azaz:

$$Tv^{k-1} = \text{const.}$$

A mi esetünkben tehát:

$$T_1 v_1^{k-1} = T_2 v_2^{k-1} = \text{const.};$$

$$T v_1'^{\,k-1} = T_2 v_2'^{\,k-1} = \text{const.};$$

vagyis:

$$\frac{v_1}{v_1'} = \frac{v_2}{v_2'} = \text{const.}$$

2. Isothermikus változások.

Az első főtétel így irható:

$$dQ = C_v dT + RT\frac{dv}{v};$$

tehát $v_2 v_2'$ úton a melegquantum változása:

$$\int dQ = RT_2 \int \frac{dv}{v}$$

$$Q_2 = RT_2 \log\frac{v_2'}{v_2}, \quad \frac{Q_2}{T_2} = R\log\frac{v_2'}{v_2};$$

a melegquantum változása $v_1 v_1'$ úton ugyanígy:

$$\frac{Q_1}{T_1} = R\log\frac{v_1'}{v_1}.$$

Mivel

$$\frac{v_1}{v_1'} = \frac{v_2}{v_2'} = \text{const.},$$

úgy tehát:

$$\frac{Q_1}{T_1} = R\log c = \frac{Q_2}{T_2} = \text{const.} = \frac{Q}{T}.$$

Két, végtelen közel fekvő isothermikus változás közt a felvett melegquantum dQ, a hőmérséklet pedig, magasabbrendű végtelen kicsinyektől eltekintve, ily két elemi változás közt T-nek vehető s így a $\frac{Q}{T}$ kifejezés alakja $\frac{dQ}{T}$ lesz; véges változásnál pedig az $\int \frac{dQ}{T}$ kifejezést kapjuk (entropia). Ha most két adiabatikus görbe közt az (*1*), (*2*) megfordítható körfolyamatot írom le, akkor az (*1*), (*2*) úton haladva, a kifejezés $\int_{(1)}^{(2)} \frac{dQ}{T}$ lesz, (*2*), (*1*) úton haladva pedig $\int_{(2)}^{(1)} \frac{dQ}{T}$ és:

$$\int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{dQ}{T} = -\int\limits_{(2)}^{(1)} \frac{dQ}{T},$$

tehát:

$$\int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{(2)}^{(1)} \frac{dQ}{T} = \int \frac{dQ}{T} = 0 \quad \text{(II. főtétel)};$$

megfordítható körfolyamatoknál tehát $\int \frac{dQ}{T}$ zérussal egyenlő.

Mivel az $A_1B_1B_2A_2A_1$ út (28. ábra) megfordítható körfolyamatot ad, mely egyszersmind isothermális, tehát:

$$\int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ = 0.$$

Másrészt az első főtétel szerint:

$$dQ = dE_i + pdv,$$

és ebből:

$$\int dQ = \int dE_i + \int pdv;$$

de E_i csak a hőmérséklettől függ és minthogy ez állandó, azért E_i is az és $dE_i = 0$. Marad tehát

$$\int dQ = \int pdv = 0.$$

A körfolyamat két részből áll; $A_1B_1B_2A_2$ úton p és v együtt változnak, az A_2A_1 úton p állandó; ezt így fejezhetjük ki:

$$\int pdv = \int\limits_{A_1}^{A_2} pdv + p\int\limits_{A_2}^{A_1} dv.$$

Van der Waals-nak a p-re adott összefüggése alapján:

$$\int pdv = \int\limits_{v_1}^{v_2} \left(\frac{RTdv}{v-b} - \frac{adv}{v^2}\right) + p\int\limits_{v_2}^{v_1} dv = 0.$$

Kiszámítva:

$$RT\log\frac{v_2-b}{v_1-b} + a\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) + p\,(v_1-v_2) = 0,$$

vagy

$$p\,(v_1-v_2) = RT\log\frac{v_1-b}{v_2-b} + a\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right).$$

A jelöléseket a jelen viszonyokra alkalmazva, a folyadék fajlagos térfogata (v_2) legyen σ, a telített gőzé (v_1) legyen s, a telített gőz nyomása P, akkor:

$$P(s-\sigma) = RT \log \frac{s-b}{\sigma-b} + a\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\sigma}\right).$$

Másrészt a

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

egyenlet a telített gőzre és a folyadékra alkalmazva, még két egyenletet kapunk:

$$P = \frac{RT}{s-b} - \frac{a}{s^2},$$

$$P = \frac{RT}{\sigma-b} - \frac{a}{\sigma^2}.$$

Ezen három egyenlet alapján állítja fel VAN DER WAALS a redukált egyenletből a következőket; magából a redukált egyenletből:

$$e = \frac{8m}{3n-1} - \frac{3}{n^2};$$

az itt használt jelzésekkel:

$$\int e dn = \int_{n_1}^{n_2} \left(\frac{8m}{3n-1} - \frac{3}{n^2}\right) dn + e \int_{n_2}^{n_1} dn = 0,$$

a hol n_2 a folyadék és n_1 a telített gőz fajlagos térfogata. Az integrálást elvégezve:

$$8m \log \frac{3n_2-1}{3n_1-1} + 3\left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}\right) + e(n_1-n_2) = 0.$$

Ha a telített gőz redukált nyomása E, úgy:

$$E(n_1-n_2) = 8m \log \frac{3n_1-1}{3n_2-1} + 3\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right),$$

a mihez járul a következő két egyenlet:

$$E = \frac{8m}{3n_1-1} - \frac{3}{n_1^2},$$

$$E = \frac{8m}{3n_2-1} - \frac{3}{n_2^2}.$$

Ezen három egyenlet E-re, n_1-re és n_2-re megoldható s adja, hogy ugyanazon redukált hőmérsékleteknél a redukált nyomás s a folyadék és telített gőz redukált térfogatai minden anyagnál ugyanazok; a megoldások alakjai:

$$E = f(m), \quad n_1 = f_1(m), \quad n_2 = f_2(m).$$

Tehát E pusztán, mint m függvénye nyerhető, vagyis a redukált nyomás s a redukált hőmérséklet viszonya minden testnél ugyanaz. Mivel a redukált nyomás a nyomásnak s a kritikus nyomásnak, a redukált hőmérséklet a hőmérsékletnek s a kritikus hőmérsékletnek viszonya, következik, hogy *két folyadéknál, melyeknél a hőmérsékleteknek a kritikus hőmérséklethez való viszonya ugyanaz, a telített gőz nyomásának a kritikus nyomáshoz való viszonya is ugyanaz.*

30. §. *Az elgőzítési meleg.*

Ismét a mechanikai hőelméletből fogunk kiindulni. Az első főtétel következő alakját már ismerjük:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial T} dT + \frac{\partial Q}{\partial v} dv,$$

vagy ha rövidebb jelzés végett írunk:

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = X, \quad \frac{\partial Q}{\partial v} = Y,$$

úgy:

$$dQ = XdT + Ydv. \tag{1}$$

Másrészt volt:

$$dQ = dE_i + dL_e,$$

ahol, minthogy $E_i = E_i(T, v)$, irható:

$$dE_i = \frac{\partial E_i}{\partial T} dT + \frac{\partial E_i}{\partial v} dv,$$

míg dL_e hasonlóan mint dQ

$$dL_e = \xi dT + \eta dv.$$

Ennek folytán:

$$dQ = \left(\frac{\partial E_i}{\partial T} + \xi\right) dT + \left(\frac{\partial E_i}{\partial v} + \eta\right) dv. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egybevetéséből következik:

$$\frac{\partial E_i}{\partial T} = X - \xi, \quad \frac{\partial E_i}{\partial v} = Y - \eta.$$

Mivel E_i pusztán T és v függvénye, azért a differencziálszámitás szabályai szerint:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial T \partial v} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial v \partial T},$$

azaz:

$$\frac{\partial}{\partial v}(X - \xi) = \frac{\partial}{\partial T}(Y - \eta),$$

tehát az I. főtétel alakja:

$$\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial T}. \tag{3}$$

Az elgőzités processusára akarjuk az egyenletet alkalmazni, tehát akkor T az elgőzités hőmérsékletét, v pedig a gőzalakú test tömegét jelenti. Ha a gőzalakú test fajlagos térfogatát s-el jelöljük, a még folyékony test tömegét ω-val, fajlagos térfogatát σ-val, akkor az egész, itt szóba jövő test térfogata:

$$m = vs + \omega\sigma.$$

Ha a folyamat alatt a tömegegységet akarjuk elgőzíteni, akkor:

$$v + \omega = 1,$$

tehát:

$$m = vs + (1 - v)\sigma = \sigma + v(s - \sigma). \tag{4}$$

Az elgőzítésnél két dolgot tehetünk fel; egyik az, hogy a gőzölgés hőmérséklete csak a nyomástól függ, tehát a nyomás csak a hőmérséklettől, mint azt kisérleti tapasztalatok mutatják, azaz:

$$p = p(T), \quad T = T(p);$$

továbbá feltehető, hogy a külső munka csak a térfogatváltozástól függ, azaz:

$$dL_e = \xi dT + \eta dv = pdm = p\left(\frac{\partial m}{\partial T}dT + \frac{\partial m}{\partial v}dv\right),$$

vagyis:

$$\xi = p\frac{\partial m}{\partial T}, \quad \eta = p\frac{\partial m}{\partial v}.$$

Így:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial m}{\partial T} + p\frac{\partial^2 m}{\partial T \partial v}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} = \frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial m}{\partial v} + p\frac{\partial^2 m}{\partial T \partial v}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial T} = \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial m}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial m}{\partial v}.$$

Mivel $p = p\ (T)$, úgy $\frac{\partial p}{\partial v} = 0$ s így (3) szerint:

$$\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial T} = -\frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial T}. \tag{5}$$

A körfolyamatok vizsgálatánál az $\int \frac{dQ}{T}$ jellemző kifejezésére (entropia) jutottunk Ha ezen kifejezést S-el jelöljük, akkor tekintettel az elgőzölgés folyamatának isothermikus voltára, lesz:

$$\int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ,$$

vagy:

$$\int dQ = TS$$

és:

$$dQ = TdS. \tag{6}$$

Ebből következik

$$\frac{\partial Q}{\partial T}dT + \frac{\partial Q}{\partial v}dv = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}dT + \frac{\partial S}{\partial v}dv\right),$$

s az előbbi jelölésekkel

$$XdT + Ydv = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}dT + \frac{\partial S}{\partial v}dv\right),$$

és:

$$X = T\frac{\partial S}{\partial T}; \quad Y = T\frac{\partial S}{\partial v}.$$

Mivel:

$$S = S(T, v),$$

úgy:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial v} = \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial T},$$

azaz:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{Y}{T}\right).$$

Elvégezve a differencziálást:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{X}{T^2}\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{1}{T}\frac{\partial Y}{\partial T} - \frac{Y}{T^2},$$

vagy

$$\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{1}{T}\left(X\frac{\partial T}{\partial v} - Y\right),$$

s mivel $T = T(p)$, tehát: $\frac{\partial T}{\partial v} = 0$, úgy marad

$$\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial T} = -\frac{Y}{T}. \tag{7}$$

Az (5) és (7) egyenletek összekapcsolásából következik:

$$Y = T\frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial T}. \tag{8}$$

Az I. főtételből (1) következik, hogy állandó hőmérsékletnél:

$$dQ = Ydv,$$

vagyis Y azon meleg, mely a gőzalakú test térfogatát dv-vel növeli, *az elgőzítési meleg* és így, mivel (4) szerint:

$$m = \sigma + v(s - \sigma),$$

úgy következik:

$$Y = T\frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial T} = T(s - \sigma)\frac{dp}{dT}. \tag{9}$$

Áttérünk Van der Waals következtetéseire. Ha a telített gőz nyomása P, akkor az Y-ra adott egyenlet szerint:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{Y}{T(s-\sigma)},$$

vagy a redukált állandókban kifejezve

$$\frac{\pi}{\vartheta}\frac{dE}{dm}=\frac{Y}{m\vartheta\varphi f(m)},$$

a hol $f(m)$ a redukált hőmérsékletnek valami függvénye és:

$$\varphi \,.\, f(m)=s-\sigma.$$

Következőleg:

$$\frac{dE}{dm}=\frac{Y}{m\pi\varphi f(m)}.$$

Behelyettesítve a kritikus állandók értékeit:

$$\pi\varphi=\frac{3a}{27b}=\frac{3R\vartheta}{8}$$

s így:

$$\frac{dE}{dm}=\frac{8Y}{3R\vartheta m f(m)}$$

vagy:

$$m f(m)\frac{dE}{dm}=\frac{8Y}{3R\vartheta}.$$

Az egyenlet baloldalán csak a redukált mennyiségek fordulnak elő s így az minden anyagra egyaránt állandó, tehát a jobboldal is az; itt tehát:

$$\frac{y}{R\vartheta}=\text{constans.}$$

Ha két anyagot tekintünk, melyeknek kritikus hőmérséklete ϑ_1 és ϑ_2, elgőzítési melegük y és Y, akkor ezeket m, μ redukált hőmérsékleteknél hasonlítva össze, a legutóbb felírt kifejezés szerint:

$$m \text{ hőmérsékletnél } \frac{y_m}{R\vartheta_1}=\frac{Y_m}{R\vartheta_2}$$

$$\mu \text{ hőmérsékletnél } \frac{y_\mu}{R\vartheta_1}=\frac{Y_\mu}{R\vartheta_2},$$

a honnan:

$$\frac{y_m}{Y_m}=\frac{y_\mu}{Y_\mu},$$

vagyis *két test elgőzítési melegének aránya minden redukált hőmérsékleten ugyanaz.*

31. §. *Az olvadás hőmérséklete.*

Teljesen analog megfontolások alapján, mint melyeket az elgőzítés processusánál végeztünk, az olvadás melegére is kaphatunk

$$y = T(s-\sigma)\frac{dp}{dT}$$

alakú kifejezést, a melyben most:

y az olvadás melege, T hőmérséklete,

s a folyadéknak és σ a szilárd testnek fajlagos térfogata.

A gőzölgésnél a folyadék mindig kiterjed, a gőz fajlagos térfogata mindig nagyobb, mint a folyadéké, $s>\sigma$, tehát a kiterjedés mindig positiv. Az olvadás térfogat nagyobbodással, vagy kisebbedéssel járhat; első esetben $s>\sigma$, másodikban $s<\sigma$. Fontos következtetést nyerünk, ha az egyenletből T és p összefüggését keressük; u. i.:

$$dT = \frac{T(s-\sigma)}{y}dp.$$

Ha az olvadásnál a test kiterjed, $s-\sigma>0$, vagyis p növelése emeli T-t is. Ha az olvadásnál a test összehuzódik, $s-\sigma<0$, vagyis p növelése csökkenti T-t.

Ezen elméleti következtetést, mely J. Thomson-tól származik, a kisérleti kutatások utólag igazolták (VIII. k. 302. lap).

32. §. *A hőokozta térfogatváltozás.*

Kiindulunk azon egyenletekből, melyeket az elgőzítés tárgyalásánál a telített gőz nyomására kaptunk (§. 29.):

$$P(s-\sigma) = RT\log\frac{s-b}{\sigma-b} + a\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\sigma}\right),$$

$$P = \frac{RT}{s-b} - \frac{a}{s^2},$$

$$P = \frac{RT}{\sigma-b} - \frac{a}{\sigma^2}.$$

A redukált egyenlet alapján a következő összefüggéseket vezettük le:

$$E(n_1-n_2)=8m\log\frac{3n_1-1}{3n_2-1}+3\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right),$$

$$E=\frac{8m}{3n_1-1}-\frac{3}{n_1^2},$$

$$E=\frac{8m}{3n_2-1}-\frac{3}{n_2^2},$$

a hol E a telített gőz redukált nyomása, n_1 a telített gőznek, n_2 a folyadéknak fajlagos térfogata.

Fejezzük ki ez utóbbi két mennyiséget is a kritikus fajlagos térfogatok részeiben, azaz:

$$n_1=g_1\varphi_1;\quad n_2=g_2\varphi_2,$$

mert a kritikus pontban a telített gőznek és folyadéknak sűrűségei s így fajlagos térfogatai is egyenlők (VIII. k. 319. lap). Akkor kapunk E-re három analog egyenletet, melyekben a redukált fajlagos térfogatok fognak szerepelni, a mely egyenletekből eliminálás útján g_2 értékét megkaphatom mint m függvényét:

$$g_2=f(m).$$

Nyerhetünk m-re is egy összefüggést; u. i. a hőokozta kiterjedésnél az egységnyi térfogat a kiterjedés után $1+at$ lesz, ha a a kiterjedési koefficziens; t-t redukált alakban kifejezve:

$$1+at=m(1+a\vartheta),$$

a honnan:

$$m=\frac{1+at}{1+a\vartheta},$$

s mivel az abszolut hőmérsékletre térve át

$$T=t+273,\quad \theta=\vartheta+273,\quad a=\frac{1}{273},$$

lesz:

$$m=\frac{1+at}{1+a\vartheta}=\frac{T}{\theta},$$

és így:

$$g_2 = \frac{n_2}{\varphi_1} = f\left(\frac{T}{\theta}\right).$$

Ha tehát két folyadéknál az abszolut hőmérséklet egyenlő törtrésze az abszolut kritikus hőmérsékletnek, akkor a folyadék fajlagos térfogata is egyenlő törtrésze a fajlagos kritikus térfogatnak.

Legyen tehát két folyadéknál az abszolut kritikus hőmérséklet θ_1 és θ_2, a kritikus térfogat (melyet ezen arányossági számításokban a fajlagos térfogat helyett vehetünk) φ_1 és φ_2; legyen az első folyadéknak térfogata T_1 és T_1' abszolut hőmérsékleteknél n_1 és n_1', a másodiknak térfogata T_2 és T_2' hőmérsékleteknél n_2 és n_2'. A hőmérsékleteket úgy válaszszuk, hogy:

$$\frac{T_1}{\theta_1} = \frac{T_2}{\theta_2}; \quad \frac{T_1'}{\theta_1} = \frac{T_2'}{\theta_2}$$

legyen; akkor a g_2-re adott kifejezés szerint:

$$\frac{n_1}{\varphi_1} = \frac{n_2}{\varphi_2}; \quad \frac{n_1'}{\varphi_1} = \frac{n_2'}{\varphi_2},$$

a honnan:

$$\frac{n_1 - n_1'}{\varphi_1} = \frac{n_2 - n_2'}{\varphi_2};$$

de:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

tehát:

$$\frac{n_1 - n_1'}{n_1} = \frac{n_2 - n_2'}{n_2},$$

vagyis *a térfogatnagyobbodás minden folyadéknál ugyanaz* (125. lap).

Péch Aladár.

TARTALOMJEGYZÉK.

Bevezetés.

I. rész.

A gázok folyósítása.

A kritikus állandók meghatározása.

II. rész.

A halmazállapotok különbségei.

A halmazállapotok változásai.

A testek physikai tulajdonságainak viselkedése a három halmazállapotban.

III. rész.

Elméleti fejtegetések.

A THETAFÜGGVÉNYEK LINEÁR TRANSZFORMÁCZIÓJÁRÓL.

EISENSTEIN az elliptikus függvények előállítására szolgáló végtelen kettősszorzatokat tárgyaló remek értekezésében* megvizsgálta, hogy miként változik ezen csak feltételesen összetartó szorzatoknak az értéke, ha tényezőinek sorrendje változik. Többek közt a következő eredmény adódik ki:

Tekintessék

$$\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{n} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m} \left(1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma}\right)$$

szorzatban a tényezőknek ama sorrendje eredeti gyanánt, a melyben a szorzás először az m, azután az n index szerint, és pedig oly módon történik, hogy minden pozitiv m, illetőleg n mellé az egyenlő értékű negativ m, illetőleg n rendeltetik, és helyettesittessenek m és n szorzási indexek

$$\begin{aligned} m &= a_0 m' + b_0 n' \\ n &= a_1 m' + b_1 n' \end{aligned} \tag{A}$$

egész számú lineár helyettesités alapján, a melynek determinánsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 1, \tag{B}$$

más m', n' indexekkel; akkor a fentebbi szorzat olyankép változtatja az értékét, hogy

---

* Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind. Crelles Journal XXXV. p. 153–274.

$$e^{\delta\frac{2a_1\pi i}{\alpha(a_0\alpha+a_1\beta)}(\gamma x-\frac{1}{2}x^2)} \tag{C}$$

exponencziális mennyiség hozzálép mint tényező (hol $\delta=+1$ vagy $=-1$, a szerint, a mint $\frac{\alpha}{\beta}$, a két periodiczitási modulus hányadosában i-nek együtthatója pozitiv vagy negativ).* EISENSTEIN ehez (illetőleg az általánosabb esethez, melyben a helyettesítés determinánsa 1-től különböző) azt a megjegyzést fűzi, hogy «mindaz, a mit eddig ‚az elliptikus függvények transzformácziójának' neveztek, az indexek átalakításának emez általánosabb neméhen van benfoglalva».**

Szándékom ezen az alapon a következőben a *thetafüggvények lineár transzformáczióját* általánosan végrehajtani, miután egy előbbi értekezésemben *** nehány általánosabb megjegyzés kapcsolatában némely speczialis esetet például tárgyaltam.

Czélszerű azt a thetafüggvényt, melynek szorzatalakja a legegyszerűbb, tudniillik ezt:

$$\vartheta_1(v,\tau)=\vartheta_1'(0,\tau).v.\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(1-\frac{v}{m+n\tau}\right) \tag{1}$$

a vizsgálat alapjául venni és a többi három thetafüggvényt erre visszavezetni.

E végből azokból az általános képletekből, melyek az argumentum fél szakaszokkal való növesztésére vonatkoznak,† könnyen kapjuk e speczialis képletet:

$$\vartheta_1(v+\tfrac{1}{2}g_\lambda+\tfrac{1}{2}h_\lambda\tau)=e^{-\frac{1}{2}h_\lambda(2v+g_\lambda-1+\frac{1}{2}h_\lambda\tau)\pi i}\,\vartheta_\lambda(v), \tag{2}$$

melyben g_λ és h_λ mennyiségek 0 vagy $+1$, illetőleg 0 vagy -1 értékeket jelentenek és a λ index értékével a következő schema szerint lesznek megadva:

---

* L. c. p. 184.

** L. c. p. 190.

*** Die Anwendung unendlicher Produkte in der Funktionentheorie. A Szász-Régeni ág. hitv. ev. gymnasium 1899-iki programmjában.

† L. p. o. KŒNIGSBERGER, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. I. p. 371.

λ	g_λ	h_λ
0	0	-1
1	0	0
2	$+1$	0
3	$+1$	-1

Tehát a következő szorzat átalakítása eszközlendő:

$$\prod_{n}^{+\infty}\prod_{-\infty}^{+\infty}\hspace{-1em}{}_{m}\left(1-\frac{v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau}{m+n\tau}\right) \tag{3}$$

(A) helyettesítést alkalmazván, mely (B) feltételnek eleget tesz, és tekintetbe véve, hogy a (C) alatti exponencziális mennyiségben $\delta=-1$ teendő, ezen szorzat a következő lesz:

$$e^{-\frac{a_1\pi i}{a_0+a_1\tau}(v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau)^2}\cdot\prod_{n'}{}_{-\infty}^{+\infty}\prod_{m'}{}_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau}{m'(a_0+a_1\tau)+n'(b_0+b_1\tau)}\right)=$$

$$=e^{-\frac{a_1\pi i}{a_0+a_1\tau}(v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau)^2}\cdot\prod_{n'}{}_{-\infty}^{+\infty}\prod_{m'}{}_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{\dfrac{v}{a_0+a_1\tau}+\frac{1}{2}\dfrac{g_\lambda+h_\lambda\tau}{a_0+a_1\tau}}{m'+n'\dfrac{b_0+b_1\tau}{a_0+a_1\tau}}\right).$$

Tegyük

$$v'=\frac{v}{a_0+a_1\tau},\quad \tau'=\frac{b_0+b_1\tau}{a_0+a_1\tau}, \tag{4}$$

továbbá

$$\frac{g_\lambda+h_\lambda\tau}{a_0+a_1\tau}=\mathfrak{g}+\mathfrak{h}\tau',$$

$$\left.\begin{aligned} g_\lambda&=a_0\,\mathfrak{g}+b_0\mathfrak{h}, & h_\lambda&=\ \ a_1\,\mathfrak{g}+b_1\mathfrak{h},\\ \mathfrak{g}&=b_1\,g_\lambda-b_0h_\lambda, & \mathfrak{h}&=-a_1g_\lambda+a_0h_\lambda,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

akkor azt kapjuk, hogy

$$\prod_{n}{}_{-\infty}^{+\infty}\prod_{m}{}_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau}{m+n\tau}\right)=$$

$$= e^{-\frac{a_1 \pi i}{a_0 + a_1 \tau}(v + \frac{1}{2} g_\lambda + \frac{1}{2} h_\lambda \tau)^2} \cdot \prod_{n'}^{+\infty}{}_{-\infty} \prod_{m'}^{+\infty}{}_{-\infty} \left(1 - \frac{v' + \frac{1}{2}\mathfrak{g} + \frac{1}{2}\mathfrak{h}\tau'}{m' + n'\tau'}\right) \tag{6}$$

a mivel tényleg megvan a (3) alatti szorzatnak lineár-transformácziója.

Ha az (1) és (2) alattiak szerint a szorzatokat az illető thetafüggvényekkel helyettesitjük, miután előbb

$$\mathfrak{g} = 2k + g_{\lambda_1}, \quad \mathfrak{h} = 2l + h_{\lambda_1} \tag{7}$$

egyenletek segitségével az új g_{λ_1} és h_{λ_1} mennyiségeket behoztuk, melyekről felteszszük, hogy értékük 0 vagy $+1$, illetőleg 0 vagy -1 lesz, tekintettel az

$$v + \tfrac{1}{2} g_\lambda + \tfrac{1}{2} h_\lambda \tau = (a_0 + a_1 \tau) \,.\, (v' + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{h}\tau')$$

egyenletre

$$e^{-\frac{1}{2} h_\lambda (2v + g_\lambda - 1 + \frac{1}{2} h_\lambda \tau)\pi i} \,.\, \vartheta_\lambda(v, \tau) =$$

$$= (a_0 + a_1 \tau) \cdot \frac{\vartheta_1'(0, \tau)}{\vartheta_1'(0, \tau')} \cdot e^{-\frac{a_1 \pi i}{a_0 + a_1 \tau}(v + \frac{1}{2} g_\lambda + \frac{1}{2} h_\lambda \tau)^2} \,.$$

$$e^{-\frac{1}{2} h_{\lambda_1} (2v' + 2k + 2l\tau' + g_{\lambda_1} - 1 + \frac{1}{2} h_{\lambda_1} \tau')\pi i} \,.\, \vartheta_{\lambda_1}(v' + k + l\tau', \tau').$$

Ez pedig, a thetafüggvények szakaszos tulajdonságainál fogva, melyek így fejezhetők ki:

$$\vartheta_\lambda(v + p + q\tau) = e^{[p(1 + h_\lambda) - q(1 - g_\lambda) - q(2v + q\tau)]\pi i} \, \vartheta_\lambda(v),$$

átalakul a következőbe:

$$e^{-\frac{1}{2} h_\lambda (2v + g_\lambda - 1 + \frac{1}{2} h_\lambda \tau)\pi i} \,.\, \vartheta_\lambda(v, \tau) =$$

$$= (a_0 + a_1 \tau) \cdot \frac{\vartheta_1'(0, \tau)}{\vartheta_1'(0, \tau')} \cdot e^{-\frac{a_1 \pi i}{a_0 + a_1 \tau}(v + \frac{1}{2} g_\lambda + \frac{1}{2} h_\lambda \tau)^2} \times$$

$$\times\, e^{-\frac{1}{2} h_{\lambda_1} (2v' + 2k + 2l\tau' + g_{\lambda_1} - 1 + \frac{1}{2} h_{\lambda_1} \tau')\pi i} \,.$$

$$e^{[k(1 + h_{\lambda_1}) - l(1 - g_{\lambda_1}) - l(2v' + l\tau')]\pi i} \,.\, \vartheta_{\lambda_1}(v', \tau') \tag{8}$$

hol e-nek az exponensei még tetemesen egyszerűsíthetők.

Marad először is egy tag, mely v-nek a négyzetét tartalmazza, tudniillik:

$$-\frac{a_1 \pi i}{a_0 + a_1 \tau} v^2 = -a_1 (a_0 + a_1 \tau) v'^2 \pi i.$$

A v-ben, illetőleg v'-ben elsőrendű tagok következőkép vonhatók össze:

$$\left[h_\lambda v - \frac{a_1}{a_0+a_1\tau}(g_\lambda+h_\lambda\tau)v - h_{\lambda_1}v' - 2lv'\right]\pi i =$$
$$= [h_\lambda v - a_1(g_\lambda+h_\lambda\tau)v' - (a_0h_\lambda - a_1g_\lambda)v']\pi i =$$
$$= [h_\lambda v - a_1h_\lambda\tau v' - a_0h_\lambda v']\pi i =$$
$$= h_\lambda\big(v-(a_0+a_1\tau)v'\big)\pi i = 0.$$

Azok a tagok, melyekben még τ és τ' fordulnak elő, így írhatók:

$$\left[\tfrac{1}{4}h_\lambda^2\tau - \frac{a_1}{a_0+a_1\tau}\cdot\tfrac{1}{4}(g_\lambda+h_\lambda\tau)^2 - (l+\tfrac{1}{2}h_{\lambda_1})^2\tau'\right]\pi i =$$
$$= \frac{1}{a_0+a_1\tau}[\tfrac{1}{4}h_\lambda^2(a_0+a_1\tau)\tau - \tfrac{1}{4}a_1(g_\lambda+h_\lambda\tau)^2 -$$
$$- \tfrac{1}{4}(a_0h_\lambda - a_1g_\lambda)^2.(b_0+b_1\tau)]\pi i =$$
$$= \frac{1}{a_0+a_1\tau}[-\tfrac{1}{4}a_1g_\lambda^2 - \tfrac{1}{4}a_1^2b_0g_\lambda^2 - \tfrac{1}{4}a_0^2b_0h_\lambda^2 + \tfrac{1}{2}a_0a_1b_0g_\lambda h_\lambda +$$
$$+ (\tfrac{1}{4}a_0h_\lambda^2 - \tfrac{1}{4}a_0^2b_1h_\lambda^2 - \tfrac{1}{4}a_1^2b_1g_\lambda^2 - \tfrac{1}{2}a_1g_\lambda h_\lambda + \tfrac{1}{2}a_0a_1b_1g_\lambda h_\lambda)\tau]\pi i.$$

A (B) egyenlet felhasználásával ez a kifejezés következőkép alakul:

$$\frac{1}{a_0+a_1\tau}[-\tfrac{1}{4}a_1a_0b_1g_\lambda^2 + \tfrac{1}{2}a_0a_1b_0g_\lambda h_\lambda - \tfrac{1}{4}a_0^2b_0h_\lambda^2 +$$
$$+ (-\tfrac{1}{4}a_1^2b_1g_\lambda^2 + \tfrac{1}{2}a_1^2b_0g_\lambda h_\lambda - \tfrac{1}{4}a_0a_1b_0h_\lambda^2)\tau]\pi i =$$
$$= -\tfrac{1}{4}(a_1b_1g_\lambda^2 - 2a_1b_0g_\lambda h_\lambda + a_0b_0h_\lambda^2)\pi i,$$

mit így is írhatunk:

$$\tfrac{1}{4}(\mathfrak{g}\mathfrak{h} - g_\lambda h_\lambda)\pi i.$$

Ezen kifejezést összevetvén a kitevőknek összes hátralevő, azaz v-től és τ-tól független tagjaival, lesz végre

$$[-\tfrac{1}{2}h_\lambda(1-g_\lambda) + \tfrac{1}{2}h_{\lambda_1}(1-g_{\lambda_1}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{h}-h_{\lambda_1})(1-g_{\lambda_1}) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}-g_{\lambda_1}) + \tfrac{1}{4}(\mathfrak{g}\mathfrak{h} - g_\lambda h_\lambda)]\pi i \qquad (9)$$

mi helyett rövidebben ezt írjuk:

$$\tfrac{1}{4}M\pi i,$$

hol M minden esetre egész számot jelent.

A (8) alatti egyenletből tehát lesz:

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_\lambda(v,\tau)=(a_0+a_1\tau)\cdot\frac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau')}\cdot e^{\frac{1}{4}M\pi i}.\,\vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') \quad (10)$$

vagy, ha az állandó tényezőket egyszerűbben jelöljük:

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_\lambda(v,\tau)=C.\,e^{\frac{1}{4}M\pi i}\,\vartheta_{\lambda_1}(v',\tau) \quad (11)$$

hol tehát a fentebbiek szerint

$$v'=\frac{v}{a_0+a_1\tau},\quad \tau'=\frac{b_0+b_1\tau}{a_0+a_1\tau}$$

és λ_1 index

$$\left.\begin{aligned} g_{\lambda_1}&\equiv\ \ b_1g_\lambda-b_0h_\lambda\\ h_{\lambda_1}&\equiv -a_1g_\lambda+a_0h_\lambda\end{aligned}\right\}\ (\text{mod. } 2)$$

kongruencziák segitségével meghatározandó. A rendes szólásmód szerint $\vartheta_{\lambda_1}(v,\tau')$ az eredeti, $\vartheta_\lambda(v,\tau)$ a transformált thetafüggvényt jelenti.

Még hátra van a *C állandónak a meghatározása.* A (10) alatti transzformácziós egyenlet ezt az állandót olyan alakban tünteti fel, mely nemcsak közvetlen betekintést enged annak a természetébe, hanem egyszerű kiszámitását is lehetővé teszi. Megjegyezzük előre, hogy az (5) és (7) alattiak folytán $\lambda=1$-nek mindig $\lambda_1=1$ felel meg és megforditva, és hogy ez esetben egyszersmint $M=0$ lesz. *Tehát C ez az érték, melyet a teljes állandó* $C.e^{\frac{1}{4}M\pi i}$ *a* ϑ_1 *függvénynek transzformácziójánál vesz fel.* Tényleg a (11)-ben $\lambda=\lambda_1=1$ és $v=v'=0$ értéket tevén, lészen

$$C=\frac{\vartheta_1(0,\tau)}{\vartheta_1(0,\tau')}=\frac{0}{0},$$

és e határozatlan alak értéke az ismeretes szabály szerint

$$\left[\frac{\vartheta_1'(v,\tau)}{\vartheta_1'(v',\tau')}\cdot\frac{dv}{dv'}\right]_{v=v'=0}=(a_0+a_1\tau)\cdot\frac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau')}.$$

Továbbá látható a (10)-ből, hogy C a λ és λ_1 indexektől független, *tehát mind a négy thetafüggvény esetén egyenlő értékű.* A teljes transzformáczió-állandónak $C.e^{\frac{1}{4}M\pi i}$-nek az értékei az egyes thetafüggvényeknél tehát csupán a második tényezőben külömböznek egymástól.

Végre kitetszik a fentebbiekből, hogy a C mennyiség, mely lényegében két (zérus argumentumos) thetafüggvénynek hányadosa, csakis a τ és τ' *modulusok függvénye.* Várható, hogy e függvény, mely v és v' változók speczializálásával (tudniillik $v=v'=0$) eredőnek képzelhető, a τ, illetőleg τ' argumentumok speczializásával egyszerűbb alakra is visszavihető. E végből mindenek előtt szükséges, C-nek τ-tól való függési módját megvizsgálni. Ez történhetik egy a C és τ közt fennálló differencziálreláczió felkeresésével. Egy ilyen pedig előállítható, ha a thetafüggvények parcziál differencziál egyenletébe:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\lambda(v,\tau)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_\lambda(v,\tau)}{\partial \tau} \qquad (a)$$

a (11) alatti transzformácziós egyenlet differencziálásából eredő értékeket behelyezzük.

A (4)-ből eredő

$$\frac{\partial v'}{\partial v} = \frac{1}{a_0+a_1\tau}, \quad \frac{\partial v'}{\partial v} = -\frac{a_1 v'}{a_0+a_1\tau}, \quad \frac{\partial \tau'}{\partial \tau} = \frac{1}{(a_0+a_1\tau)^2}$$

reláczíók fölhasználásával, és tekintettel arra, hogy $e^{\frac{1}{4}M\pi i}$ v-től és τ-tól független tiszta számbeli állandó, lesz:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\lambda(v,\tau)}{\partial v^2} = \frac{C.e^{\frac{1}{4}M\pi i}.e^{-a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}}{(a_0+a_1\tau)^2} \times$$

$$\times \Big[(a_0+a_1\tau)^2.(2a_1 v'\pi i)^2 \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') - 2a_1(a_0+a_1\tau)\pi i \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') -$$

$$-4a_1(a_0+a_1\tau)v'\pi i \frac{\partial \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial v'} + \frac{\partial^2 \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial v'^2}\Big],$$

$$\frac{\partial \vartheta_\lambda(v,\tau)}{\partial \tau} = \frac{C.e^{\frac{1}{4}M\pi i}.e^{-a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}}{(a_0+a_1\tau)^2} \times$$

$$\times \Big[(a_0+a_1\tau)^2 \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{d\tau} \cdot \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') + (a_0+a_1\tau)^2 a_1^2 v'^2 \pi i \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') -$$

$$- a_1(a_0+a_1\tau)v' \frac{\partial \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial v'} + \frac{\partial \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial \tau'}\Big].$$

Ezt az értékeket (a)-ba helyettesitvén, a

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial v'^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial \tau'}$$

egyenlet tekintetbe vételével ered

$$-2a_1(a_0+a_1\tau)\pi i \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') = 4\pi i (a_0+a_1\tau)^2 \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{d\tau} \cdot \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau'),$$

a miből

$$-\frac{1}{2}\frac{a_1 dt}{a_0+a_1\tau} = \frac{dC}{C},$$

és végre e logarithmikus differencziálok átintegrálva és az integráczió állandót log c alakban irva, lesz

$$C = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}. \tag{12}$$

A (11) alatti transformácziós egyenlet tehát ebben az alakban is irható:

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i} \cdot \vartheta_\lambda(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{\frac{1}{4}M\pi i}\vartheta_{\lambda_1}(v',\tau'), \tag{13}$$

hol a fentebbiek értelmében c független v, τ és λ-tól, tehát csak

$$a_0,\ a_1,\ b_0,\ b_1$$

transformácziós számokkal meghatározott tiszta számbeli állandót jelent, melynek kiszámítása most eszközlendő.

A (10), (11) és (12) alattiak folytán

$$c = (a_0+a_1\tau)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau')} \tag{m}$$

c-nek épen említett tulajdonságainál fogva szabad lesz, az (m) alatti kifejezés egyszerűsítésének czéljából τ és τ' helyébe bizonyos speciális értékeket tenni. E végből meghatározzuk a

$$\tau' = \frac{b_0+b_1\tau}{a_0+a_1\tau} \tag{n}$$

egyenletből azt az értékét, mely mellett

$$\tau' = \tau \tag{o}$$

tehát egyszersmind

$$\vartheta_1'(0,\tau)=\vartheta_1'(0,\tau') \qquad (p)$$

Itt figyelembe veendő, hogy

$$\frac{\tau}{i}$$

hányados *valós* részének *lényegesen pozitivnak* kell lennie. Ha tehát

$$\tau=t+t_1 i,$$

akkor a t_1 *egy* 0-*tól különböző pozitiv valós szám*.

(o)-nak behelyettesitése után (n)-ből lesz

$$t+t_1 i=\frac{b_0+b_1 t+b_1 t_1 i}{a_0+a_1 t+a_1 t_1 i}$$

és ebből, ha a valós részeket a képzetesektől elválasztjuk, az ered, hogy

$$\left.\begin{aligned} a_0 t+a_1 t^2-a_1 t_1^2&=b_0+b_1 t\\ a_0 t_1+2a_1 t t_1&=b_1 t_1.\end{aligned}\right\} \qquad (q)$$

A második egyenlet folytán

$$t=-\frac{a_0-b_1}{2a_1},$$

és ennek az értéknek behelyettesitése után az első egyenlet átmegy a következőbe:

$$a_1 t_1^2=-\frac{(a_0-b_1)^2}{4a_1}-b_0,$$

vagyis

$$t_1=\frac{1}{2a_1}\sqrt{-(a_0-b_1)^2-4a_1 b_0},$$

hol az előjel úgy határozandó meg, hogy t_1 pozitiv legyen. A gyök tehát a_1-el egyidőben pozitiv vagy negativ. Ez a következő egyszerű módon kifejezhető:

$$t_1=+\frac{1}{2a_1}\cdot\frac{a_1}{|a_1|}\cdot\sqrt{-(a_0-b_1)^2-4a_1 b_0}.$$

Tekintetbe véve, hogy

$$a_0b_1-a_1b_0=1,$$

az utóbbi kifejezés még egyszerűbben így is írható:

$$t_1=+\frac{1}{2a_1}\cdot\frac{a_1}{|a_1|}\cdot\sqrt{-(a_0+b_1)^2+4}.$$

Megjegyzendő, hogy ez az előállítás csak addig érvényes, míg a_1 *zérustól különböző* és *a gyökjel alatti kifejezés pozitiv,* mivel t_1-nek valós számnak kell lennie.

A modulus keresett értéke tehát ez:

$$\tau=\tau'=-\frac{a_0-b_1}{2a_1}+\frac{i}{2a_1}\cdot\frac{a_1}{|a_1|}\cdot\sqrt{-(a_0+b_1)^2+4}.$$

Ezt az értéket behelyettesítvén az (m)-be és az azonnal meghatározandó előjel helyébe ideiglenesen ε tényezőt téve, melynek értéke $+1$ vagy -1, az állandó értéke lesz:

$$c=\varepsilon\cdot\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(a_0+b_1)+\tfrac{1}{2}i\frac{a_1}{|a_1|}\sqrt{-(a_0+b_1)^2+4}\right]^3}. \qquad (14)$$

A fent említett érvényességi feltételek értelmében mindig

$$-(a_0+b_1)^2+4>0$$

kell hogy legyen. Tehát csak a következő három eset fordulhat elő:

1. $a_0+b_1=0, \qquad c=\varepsilon\sqrt{\left[i\frac{a_1}{|a_1|}\right]^3}$

vagyis (ha az állandó különböző értékeit a c betűhez alkalmazott indexekkel különböztetjük meg)

$$c_1=\varepsilon\sqrt{-i}, \quad a_1>0$$
$$c_2=\varepsilon\sqrt{i}\ , \quad a_1<0.$$

2. $a_0+b_1=1, \qquad c_3=\varepsilon\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\frac{a_1}{|a_1|}\sqrt{3}\right]^3}$
$\qquad\qquad\qquad =\varepsilon i,$

3. $a_0+b_1=-1, \qquad c_4=\varepsilon\sqrt{\left[-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\frac{a_1}{|a_1|}\sqrt{3}\right]^3}$
$\qquad\qquad\qquad =\varepsilon.$

Az ε értéke könnyen meghatározható, ha a

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

transzformácziót kétszer egymásután alkalmazzuk. Ered ugyanis ez összetett transformáczió:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

és ebből azonnal következik, hogy

$$c_3^2 = c_4$$

vagy

$$\varepsilon = -1.$$

Most az állandó a következő alakban is irható:

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-\frac{1}{4}\pi i} \\ c_2 &= e^{-\frac{3}{4}\pi i} \\ c_3 &= e^{-\frac{1}{2}\pi i} \\ c_4 &= e^{-\pi i}. \end{aligned}$$

Az emlitett érvényességi feltételek azonban nem járnak az általánosság megszoritásával. Mert könnyen bebizonyitható, hogy minden transzformáczió más transzformácziókra redukálható, melyek ezen feltételeknek eleget tesznek. Tudva van ugyanis, hogy bármely tetszés szerinti lineár-transzformácziót a két

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

normáltranszformáczió egymásután való alkalmazásával lehet végrehajtani,* nyilvánvaló továbbá, hogy a második normáltranszformáczió az adott feltételeknek megfelel, míg az első két oly transzformáczióra bontható, melyek a feltételeknek szintén eleget tesznek, tudniillik:

---

* L. p. o. KŒNIGSBERGER, l. c. II. p. 70.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Igy a transformácziós állandó meghatározása minden esetben lehetséges. Az alak, melyben azt előállitottuk, közvetlen összehasonlitást nem enged a Hermite elvei szerint kiszámitott és Gauss-féle összegekben előállitott állandóval, azonban számos speczialis esetben sikerült a megegyezést kimutatnom.

Még a fent kizárt esetben is, mikor t. i. $a_1=0$, c-nek egy kifejezését kell levezetni. Az eddigi úton ez nem sikerült. Azonban könnyen czélhoz jutunk

$$\vartheta_1'(0,\tau) = 2\pi \,.\, e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} \,.\, \prod_{1}^{\infty}\nolimits_{\nu} (1-e^{2\nu\pi i\tau})^3$$

végtelen szorzat felhasználásával. Tudniillik

$$a_0b_1 - a_1b_0 = 1$$

egyenlet szerint lesz $a_1=0$ esetben:

$$a_0 = b_1 = \pm 1,$$

b_0 tetszés szerinti,

$$\tau' = \frac{b_0}{a_0} + \tau = \pm\, b_0 + \tau,$$

az (m) alatti kifejezésből tehát

$$c = a_0^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} \,.\, \prod_{1}^{\infty}\nolimits_{\nu} (1-e^{2\nu\pi i\tau})^3}{e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} \,.\, e^{\frac{1}{4}\pi i\frac{b_0}{a_0}} \,.\, \prod_{1}^{\infty}\nolimits_{\nu} (1-e^{2\nu\pi i\tau} \,.\, e^{\pm 2\nu\pi i b_0})^3},$$

vagyis

$$c = a_0^{\frac{3}{2}} \,.\, e^{-\frac{1}{4}\pi i\frac{b_0}{a_0}} \tag{15}$$

minélfogva a (13) alatti transzformácziós egyenlet átmegy a következőbe:

$$\vartheta_\lambda(v,\tau) = a_0 e^{-\frac{1}{4}\pi i\frac{b_0}{a_0}} \,.\, e^{\frac{1}{4}M\pi i} \,.\, \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau'). \tag{16}$$

Végre még szükséges, az általános transformácziós egyenletből a lineár-transzformáczió egyes osztályaira nézve érvényes specziális kifejezéseket levezetni. A

$$\left.\begin{aligned} g_{\lambda_1} &\equiv b_1 g_\lambda - b_0 h_\lambda \\ h_{\lambda_1} &\equiv - a_1 g_\lambda + a_0 h_\lambda \end{aligned}\right\} \pmod{2}$$

kongruencziákból kiderül, hogy a transzformácziós számok két oly rendszere, melyek

$$\left.\begin{aligned} a_0 &\equiv \alpha_0 \\ a_1 &\equiv \alpha_1 \\ b_0 &\equiv \beta_0 \\ b_1 &\equiv \beta_1 \end{aligned}\right\} \pmod{2}$$

relácziókkal vannak összekapcsolva, egy bizonyos λ indexhez egy és *ugyanazon* λ_1 indexet fogják szolgáltatni, hogy tehát a transformácziós számok mindazon rendszereiből, melyek 2 modulus szerint kongruensek, lényegileg ugyanazon transzformáczió ered. Tekintetbe véve, hogy

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_0 & b_1 \end{vmatrix} = 1$$

determinánsban két ugyanazon sorban, vagy ugyanazon oszlopban álló számnak relativ primszámoknak kell lenniök, következik, hogy az összes transzformácziókat a következő hat osztályba foglalhatjuk:

	$a_0\equiv$	$a_1\equiv$	$b_0\equiv$	$b_1\equiv$
I	1	0	0	1
II	0	1	1	0
III	1	1	0	1
IV	1	1	1	0
V	1	0	1	1
VI	0	1	1	1

A (13) alatti általános transzformácziós egyenletből ered tehát, ha $\frac{1}{4}M$ értékét az egyes esetekben (9)-ből kiszámítjuk, az összes lineár transzformácziók következő összeállítása:

I.

$$a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 0,\ b_0 \equiv 0,\ b_1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

$$g_{\lambda_1} \equiv g_\lambda,\ h_{\lambda_1} \equiv h_\lambda \pmod{2}.$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}.\vartheta_0(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}.e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0-2a_0-2b_0+2)}\vartheta_0(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}.\vartheta_1(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}.\vartheta_1(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}.\vartheta_2(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}.e^{-\frac{\pi i}{4}(a_1b_1-2b_1+2)}.\vartheta_2(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}.\vartheta_3(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}.e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0+a_1b_1-2(b_0+b_1-1))}.\vartheta_3(v',\tau').$$

Ennek az osztálynak legegyszerűbb esete

$$a_0=1,\ a_1=0,\ b_0=0,\ b_1=1$$

az azonos függvényt adja.

II.

$$a_0 \equiv 0,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

$$g_{\lambda_1} \equiv h_\lambda,\ h_{\lambda_1} \equiv g_\lambda \pmod{2}.$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}.e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0-2b_0)}.\vartheta_2(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}.\vartheta_1(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}.e^{-\frac{\pi i}{4}(a_1b_1-2a_1-2b_1+4)}.\vartheta_0(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}.e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0+a_1b_1-2(b_0+b_1-1))}.\vartheta_3(v',\tau').$$

A legegyszerűbb esetben:

$$a_0=0,\ a_1=-1,\ b_0=1,\ b_1=0$$

lészen

$$\tau' = -\frac{1}{\tau},\ v' = -\frac{v}{\tau},\ \tau = -\frac{1}{\tau'},\ v = \frac{v'}{\tau'},$$

$$c = e^{-\frac{3\pi i}{4}}$$

$$e^{\tau v'^2 \pi i}\,\vartheta_0(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{\tau}} \cdot \vartheta_2(v',\tau'),$$

$$e^{\tau v'^2 \pi i}\,\vartheta_1(v,\tau) = \frac{e^{+\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{\tau}} \cdot \vartheta_1(v',\tau'),$$

$$e^{\tau v'^2 \pi i}\,\vartheta_2(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{\tau}} \cdot \vartheta_0(v',\tau'),$$

$$e^{\tau v'^2 \pi i}\,\vartheta_3(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{\tau}} \cdot \vartheta_3(v',\tau_{,}).$$

III.

$$a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 0,\ b_1 \equiv 1 \text{ (mod. 2)}$$
$$g_{\lambda_1} \equiv g_\lambda,\ h_{\lambda_1} \equiv g_\lambda + h_\lambda \text{ (mod. 2)}.$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_0(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0-2(a_0+b_0-1))}\,\vartheta_0(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_1(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot \vartheta_1(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_2(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_1b_1-2b_1+2)}\,\vartheta_3(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_3(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0+a_1b_1+2a_1b_0-2(b_0+b_1-1))}\,\vartheta_2(v',\tau').$$

A legegyszerűbb esetből:

$$a_0=1,\ a_1=1,\ b_0=0,\ b_1=1$$

ered:

$$\tau' = \frac{\tau}{1+\tau},\quad v' = \frac{v}{1+\tau},\quad \tau = \frac{\tau'}{1-\tau'},\quad v = \frac{v'}{1-\tau'},$$

$$c = e^{-\frac{3\pi i}{4}},\text{*}$$

* Ebben az esetben $a_0 + b_1 = 2$. A transzformáczió következőképen bontható fel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

A jobb oldalon álló transformácziók állandói c_3 és c_1, tehát

$$c = c_3 . c_1 = e^{-\frac{3\pi i}{4}}.$$

$$e^{(1+\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_0(v,\tau)=\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{1+\tau}}\cdot\vartheta_0(v',\tau'),$$

$$e^{(1+\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_1(v,\tau)=\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{1+\tau}}\cdot\vartheta_1(v',\tau'),$$

$$e^{(1+\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_2(v,\tau)=\frac{e^{-\pi i}}{\sqrt{1+\tau}}\cdot\vartheta_3(v',\tau'),$$

$$e^{(1+\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_3(v,\tau)=\frac{e^{-\pi i}}{\sqrt{1+\tau}}\cdot\vartheta_2(v',\tau').$$

IV.

$$a_0\equiv 1,\ a_1\equiv 1,\ b_0\equiv 1,\ b_1\equiv 0 \ (\text{mod. } 2),$$
$$g_{\lambda_1}\equiv h_\lambda,\ h_{\lambda_1}\equiv g_\lambda+h_\lambda \ (\text{mod. } 2).$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0-2b_0)}\,\vartheta_3(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot\vartheta_1(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_1b_1-2(a_1+b_1)+4)}\,\vartheta_0(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0+2a_0b_1+a_1b_1-2(b_0+b_1))}\,\vartheta_2(v',\tau').$$

A legegyszerűbb esetben:

$$a_0=1,\ a_1=-1,\ b_0=1,\ b_1=0$$

az adódik ki, hogy

$$\tau'=\frac{1}{1-\tau},\quad v'=\frac{v}{1-\tau},\quad \tau=\frac{\tau'-1}{\tau'},\quad v=\frac{v'}{\tau'},$$
$$c=e^{-\frac{\pi i}{2}},$$

$$e^{-(1-\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau)=\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{1-\tau}}\cdot\vartheta_3(v',\tau'),$$

$$e^{-(1-\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau)=\frac{e^{-\frac{\pi i}{2}}}{\sqrt{1-\tau}}\cdot\vartheta_1(v',\tau'),$$

$$e^{-(1-\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-\tau}}\cdot\vartheta_0(v',\tau'),$$

$$e^{-(1-\tau)v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau)=\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{1-\tau}}\cdot\vartheta_2(v',\tau').$$

V.

$$a_0\equiv 1,\ a_1\equiv 0,\ b_0\equiv 1,\ b_1\equiv 1\ (\text{mod. } 2),$$
$$g_{\lambda_1}\equiv g_\lambda+h_\lambda,\ h_{\lambda_1}\equiv h_\lambda\ (\text{mod. } 2).$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0-2b_0)}\vartheta_3(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot\vartheta_1(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_1b_1-2b_1+2)}\vartheta_2(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0+2a_0b_1+a_1b_1-2(a_0+a_1+b_0+b_1-1))}\vartheta_0(v',\tau').$$

A legegyszerűbb esetben:

$$a_0=1,\ a_1=0,\ b_0=-1,\ b_1=1$$

$a_1=0$ miatt (16) képlet alkalmazandó. Lészen:

$$\tau'=\tau-1,\ v'=v,\ \tau=\tau'+1,\ v=v',$$

$$\vartheta_0(v,\tau)=\vartheta_3(v',\tau'),$$
$$\vartheta_1(v,\tau)=e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_1(v',\tau')$$
$$\vartheta_2(v,\tau)=e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_2(v',\tau')$$
$$\vartheta_3(v,\tau)=\vartheta_0(v',\tau').$$

VI.

$$a_0\equiv 0,\ a_1\equiv 1,\ b_0\equiv 1,\ b_1\equiv 1\ (\text{mod. } 2),$$
$$g_{\lambda_1}\equiv g_\lambda+h_\lambda,\ h_{\lambda_1}\equiv g_\lambda\ (\text{mod. } 2).$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_0b_0-2b_0)}\vartheta_2(v',\tau),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot\vartheta_1(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_1b_1-2b_1+2)}\vartheta_3(v',\tau'),$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{\pi i}{4}(a_1b_0+2a_0b_1+a_1b_1-2(a_0+a_1+b_0+b_1\;\;1))}\vartheta_0(v',\tau$$

A legegyszerűbb esetben:

$$a_0=0,\ a_1=1,\ b_0=-1,\ b_1=1$$

ered:

$$\tau'=\frac{\tau-1}{\tau},\quad v'=\frac{v}{\tau},\quad \tau=\frac{1}{1-\tau'},\quad v=\frac{v'}{1-\tau'},$$

$$c=e^{-\frac{\pi i}{2}},$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau)=\frac{e^{-\pi i}}{\sqrt{\tau}}\cdot\vartheta_2(v',\tau'),$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau)=\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\tau}}\cdot\vartheta_1(v',\tau'),$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau)=\frac{e^{-\frac{3\pi i}{2}}}{\sqrt{\tau}}\cdot\vartheta_3(v',\tau'),$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau)=\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{\tau}}\cdot\vartheta_0(v',\tau').$$

A felállított transzformáczió-képletek a közönséges úton talált képletekkel tökéletesen megegyeznek, eltekintve az állandó tényezőtől, a melynek alakja — a mint már említettük — az általános esetben összehasonlítást nem enged. A minden osztályban kiszámított «legegyszerűbb esetekben» azonban, az állandónak értékeit a Gauss-féle összegekben előállított kifejezésekből kiadódó értékekkel megegyezőknek találtam.

Kinn Gusztáv Adolf.

TÉTELEK A MÁSODRENDŰ KÚPRÓL.

A következőkben a másodrendű kúpra vonatkozó két tételt fogok bemutatni, mely egymásnak dualisan megfelelő és tudomásom szerint még ismeretlenek. Ez általános tételeket alkalmazni fogom néhány speczialis kúpra, a melyből kitűnik, hogy e kúpok speczialitása ama tételek alapján egyszerű módon jut kifejezésre.

*

Induljunk ki a másodrendű kúp fokális sugarainak amaz ismert tulajdonságából, hogy egy fokálissugárra merőleges sík a kúpot kúpszeletben, a fokalissugarat pedig e kúpszeletnek egyik gyújtópontjában metszi.

Nevezzük a másodrendű kúp csúcsát M-nek, egyik fokálissugarát f-nek, ennek a kúpra vonatkozó polár-síkját φ-nek. Messük a kúpot, az f egyenest és a φ sikot az f-re merőleges síkkal a $k^{(2)}$ kúpszeletben, az F pontban és az f' egyenesben; az F pont a $k^{(2)}$-nek gyújtópontja és az f' egyenes az F-hez tartozó vezérlővonala.

A $k^{(2)}$ kúpszelet tetszés szerinti P pontjából az f' egyenesre és a φ síkra bocsátott merőlegesnek talpa legyen R, illetve Q.

A $k^{(2)}$ kúpszelet minden P pontjára nézve

$$\frac{PF}{PR} = \text{állandó},$$

és a $k^{(2)}$ kúpszelet síkjának minden P pontjára vonatkozólag

$$\frac{PR}{PQ} = \text{állandó} ;$$

ebből következik, hogy a $k^{(2)}$ minden P pontját illetőleg

$$\frac{PF}{PQ} = \text{állandó}.$$

Tekintve, hogy ezen állandó viszony nem változik, ha a P pont a kúpnak MP alkotóját befutja, mondhatjuk:

Valamely másodrendű kúp pontjainak a kúp egyik fokálissugarától és ennek a kúpra vonatkozó polár-síkjától mért távolságai viszonya állandó.

Vagy másképen kifejezve:

A másodrendű kúp alkotói a kúp egyik fokálissugarával, és ennek a kúpra vonatkozó polárissíkjával oly szögeket alkotnak, a melyek sinusának viszonya állandó.

Hogy ezt az állandó viszonyt λ-át a másodrendű kúp állandóival kifejezhessük, jelöljük azokat a szögeket, melyeket a kúp egyik fősíkjában fekvő alkotók a kúp elliptikus tengelyével alkotnak ψ és ϑ-val, azon szögeket, melyeket a fokális sugarak és azoknak a kúpra vonatkozó polár-síkjai ugyanezzel az elliptikus tengelylyel képeznek ε, illetve τ-val.

Az előbbi tétel alapján

$$\lambda = \frac{\sin(\psi - \varepsilon)}{\sin(\tau - \psi)};$$

s mert a fokális sugár és polárissíkja a kúptól harmonikusan van elválasztva

$$\operatorname{tg}^2\psi = \operatorname{tg}\varepsilon \, . \operatorname{tg}\tau;$$

végre a fokális sugár helyzetét a kúp fősikjában meghatározó relaczió

$$\cos\psi = \cos\varepsilon \, . \cos\vartheta.$$

Ha ebből a három egyenletből az ε és τ értékeket kiküszöböljük, megkapjuk a keresett λ értéket kifejezve ψ és ϑ-val, t. i.

$$\lambda^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\vartheta - \operatorname{tg}^2\vartheta \, . \operatorname{cotg}^2\psi.$$

A talált utolsó tételből a dualitás elve alapján új tételt nyerünk, mely a másodrendű kúp és annak cziklikus síkjaira vonatkozik. A tétel a következő:

Ama szögek sinusának viszonya, melyet valamely másodrendű kúp változó érintősíkja a kúp egyik cziklikus síkjával és e síknak a kúpra vonatkozó polár-sugarával alkot, állandó. Ez az állandó szám λ', ha a ψ és ϑ-nak ugyanaz a jelentése van mint előbb volt, ekkép fejezhető ki

$$\lambda'^2 = 1 + \mathrm{cotg}^2\psi - \mathrm{cotg}^2\psi \,.\, \mathrm{tg}^2\vartheta.$$

Ez a relaczió a következő három egyenletből

$$\lambda' = \frac{\sin(\varepsilon' - \vartheta)}{\sin(\vartheta - \tau')}$$

$$\mathrm{tg}^2\vartheta = \mathrm{tg}\,\varepsilon' \,.\, \mathrm{tg}\,\tau'$$

$$\sin\vartheta = \sin\varepsilon' \,.\, \sin\psi$$

származik, mely az előbbi három egyenlettel analog, ha a ε' és τ' ama szögeket jelentik, a melyet a másodrendű kúp cziklikus síkja és annak a kúpra vonatkozó polárissugara a kúpnak elliptikus tengelyével képez.

De ha ez egyenletek közül az elsőt *közvetetlenül* akarjuk levezetni a másodrendű kúpból, jelöljük a kúp csúcsát M-mel, egy cziklikussíkját és annak polárissugarát $\varkappa$ és k-val, a kúpnak egy érintősíkját π-vel, azt a kört és azt a pontot, melyben egy a $\varkappa$-val párhuzamos sík a kúpot és a k sugarat metszi $k^{(2)}$-vel és O-val. Az O pont a $k^{(2)}$ körnek középpontja; e kör sugara r, és az O pontból a π síkra bocsátott merőlegesnek talpa Q.

Minthogy e merőlegesnek OQ-nak értéke $r\sin(\pi\varkappa)$ és $OM \,.\, \sin(\pi k)$, azért

$$\frac{\sin(\pi\varkappa)}{\sin(\pi k)} = \frac{OM}{r} = \text{állandó},$$

mely más betűkkel már amaz első egyenletet fejezi ki.

Mindkét tétel megforditása is igaz marad, azaz:

Ha egyenes és sík metszéspontján keresztül oly

sugarakat fektetünk, hogy ama szögek sinusainak viszonya, melyet e sugarak a felvett egyenessel és síkkal alkotnak állandó, akkor e sugarak egy másodrendű kúpon feküsznek, melynek a felvett egyenes egyik fokalissugara, és a sík e fokalissugárnak a kúpra vonatkozó poláris síkja.

síkokat fektetünk, hogy ama szögek sinusainak viszonya, melyet e síkok a felvett síkkal és egyenessel alkotnak állandó, akkor e síkok egy másodrendű kúpot burkolnak, melynek a felvett sík egyik cziklikus síkja és az egyenes e síknak a kúpra vonatkozó polarissugara.

*

Speczialis másodrendű kúpokat meghatározó ψ és ϑ szögek között bizonyos relacziók vannak, s ezért a λ és λ' állandók is bizonyos speczialis értékeket vesznek fel e kúpokra nézve. Erre vonatkozólag a következő érdekesebb eseteket találtam.

Ha a másodrendű kúp úgynevezett Pappus-féle kúp, melynek alkotói tehát egy gömb egy főkörét a gömbnek egy pontjából projicziálják, úgy $\vartheta = 45°$, tehát $\lambda' = 1$.

Az úgynevezett Hachette-féle kúpra vonatkozólag, mely a Pappus-félének reciprok kúpja, $\psi = 45°$, tehát $\lambda = 1$. (A Hachette-féle kúp pl. akkép származtatható, hogy egy ellipszis egyik gyújtópontjában az ellipszis síkjára emelt merőlegesen oly pontot veszünk fel, melynek ama siktól mért távolsága az ellipszis fél-melléktengelyével egyenlő; az ellipszist e pontból projicziáló kúp Hachette-féle.)

A két tétel, melyet a λ' és λ speczialis értéke folytán nyerünk a következő:

«*Mindama síkok, melyek egy egyenes és egy sík metszéspontján keresztülmennek és amaz egyenes és síkhoz egyenlő szögek alatt hajlanak, Pappus-féle kúpot burkolnak be.*»

«*Mindama sugarak, melyek egy egyenes és egy sík metszéspontján keresztül menve ezen egyenes és síkhoz egyenlő szögek alatt hajlanak Hachette-féle kúpon feküsznek.*»

A jobb oldalon álló tétel még ekkép is kifejezhető:

«Mindama pontok, melyek egy egyenestől és egy siktól egyenlő távolságra vannak HACHETTE-féle kúpon feküsznek, melyre nézve a felvett egyenes fokális sugár». (A HACHETTE-féle kúpnak e származtatása egy parabolára emlékeztet, melynek pontjai egy ponttól és egyenestől egyenlő távolságra vannak.)

Az *orthogonalis kúp* alkotói egy kör pontjait oly M pontból projicziálják, hogy egy kúpalkotó a kör síkjára merőleges. E kúp ψ és ϑ állandói között a következő relaczió vezethető le: *

$$\cot g^2\vartheta - \cot g^2\psi = 1.$$

Ha a kör középpontját a kúp csúcsával összekötő egyenes hajlásszöge a kör síkjához α, akkor α és ϑ között e kúpnál még ily összefüggés van

$$2 \cot g\, \alpha = \operatorname{tg} 2\,\vartheta.$$

És ha e két egyenletéből és a

$$\lambda'^2 = 1 + \cot g^2\psi - \cot g^2\psi \operatorname{tg}^2\vartheta$$

-ből a ψ és ϑ-t kiküszöböljük, nyerjük a

$$\lambda' = \frac{1}{\cos \alpha}$$

kifejezést.

Az *orthogonalis kúp recziprok kúpját* pl. akkép származtathatjuk le, ha egy parabola gyújtópontjában annak síkjára emelt merőlegesnek tetszés szerinti pontjából projicziáljuk a parabolát; e projicziáló kúp már a kivánt. E kúp állandói között fönáll a

$$\operatorname{tg}^2\psi - \operatorname{tg}^2\vartheta = 1$$

relaczió.** Ha másrészt azt a szöget, a melyet a kúpcsúcsának a parabola vezérvonalával és gyújtópontjával összekötő sík és egyenes alkot α-val jelöljük, akkor e kúpnál

$$2 \cot g\, \alpha = \operatorname{tg} 2\,\vartheta.$$

* SCHRÖTER: Die Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung; 68. oldal.

** SCHRÖTER: D. Th. d. O. z. O. 72. oldal.

És ha ismét ezekből az egyenletekből a $\lambda^2 = 1 + \mathrm{tg}^2\vartheta - \mathrm{tg}^2\vartheta \, \mathrm{cotg}^2\psi$ segítségével a ϑ és ψ-t kiküszöböljük, nyerjük a

$$\lambda = \frac{1}{\cos a}$$

kifejezést. Ennélfogva

«Ha egy sík és egy egyenes metszéspontján keresztül oly síkokat fektetünk, hogy a szögek sinusának viszonya, melyet e síkok a felvett egyenessel és síkkal alkotnak cos a, akkor e síkok orthogonalis kúpot burkolnak be.»

oly sugarakat fektetünk; hogy a szögek sinusának viszonya, melyet e sugarak a felvett síkkal és egyenessel alkotnak cos a, akkor e sugarak orthogonalis kúpnak reczíprokus kúpján feküsznek.»

Az egyenlőoldalú kúpnak és reczíprok kúpjának ψ és ϑ állandói között a következő relácziók vannak: *

$$\mathrm{cotg}^2\psi + \mathrm{cotg}^2\vartheta = 1, \quad \text{illetve} \quad \mathrm{tg}^2\psi + \mathrm{tg}^2\vartheta = 1.$$

Ebből az egyenlőoldalú kúpra és reczíprok kúpjára levezethetők a

$$\lambda^2 = 2, \quad \text{illetve} \quad \lambda'^2 = 2$$

relácziók.

Ennélfogva:

«Ha egyenes és sík metszőpontján keresztül oly sugarakat fektetünk, hogy ama szögek sinusainak viszonya, melyet e sugarak amaz egyenessel és síkkal képeznek $= \sqrt{2}$, *akkor e sugarak egyenlőoldalú kúpon feküsznek.»*

síkokat fektetünk, hogy ama szögek sinusainak viszonya, melyet e síkok ama felvett síkkal és egyenessel képeznek $= \sqrt{2}$, *akkor e síkok egyenoldalú kúp reczíprok kúpjának érintősíkjai.»*

Meg akarjuk még jegyezni, hogy ha egyenlőoldalú hiperbola pontjait, egy oly egyenes tetszés szerinti pontjából projicziáljuk, mely az egyenlőoldalú hiperbolát metszi és annak síkjára merőleges,

* SCHRÖTER: D. Th. d. O. z. O. 80. és 87. oldal.

akkor a projicziáló kúp egyenlőoldalú. Ha pedig parabola pontjait valamely egyenesnek bármely pontjából projicziáljuk, mely a parabola sikjára merőleges és vezérvonalát metszi, akkor a projicziáló kúp az egyenlőoldalúnak recziprok kúpja (SCHRÖTER).

Lehet oly kúpot is találni, melynek a két fokális sugara és a két cziklikus síkja egymásra merőleges. Az ilyen másodrendű kúpnál

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{cotg} \vartheta = \sqrt{2},$$

és

$$\lambda = \lambda' = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

E kúpnak még az a jellemző tulajdonsága van, hogy ama szög tangense, melyet egy fokális sugár polársikjával, és egy cziklikussík polárissugarával képez $= \frac{1}{3}$.

Ebből következik:

«Ha valamely egyenes és sik hajlásszögének tangense $\frac{1}{3}$, és a sik és egyenes metszéspontján keresztül oly sugarakat (síkokat) fektetünk, hogy ama szögek sinusának viszonya, melyet e sugarak (síkok) a felvett egyenessel és síkkal (illetve a síkkal és egyenessel) alkotnak $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, akkor azok oly másodrendű kúpnak alkotói (érintősikjai), melynek fokálissugarai és cziklikus síkjai merőlegesek egymásra».

Ha valamely ellipszis főtengelye két akkora mint a melléktengelye $2b$, és az ellipszis középpontjában az ellipszis síkjára emelt merőlegesen egy oly pontot veszünk fel, melynek távolsága az ellipszis síkjától $b\sqrt{2}$, akkor az ellipszist e pontból projicziáló kúp már olyan lesz, melynek fokalissugarai és egyszersmind cziklikus síkjai merőlegesek egymásra.

Klug Lipót.

A BECQUEREL-SUGARAKRÓL.

Az uránnak és vegyületeinek azt a különös tulajdonságát, hogy oly tartós sugarakat lövelnek ki, a melyek a fényképező lemezre hatnak, továbbá a levegőt és a gázokat elektromos vezető képességgel ruházzák fel, H. Becquerel fedezte fel (1896) és «urán-sugárzás»-nak nevezte el. E nevet később el kellett ejteni, mert kiderült, hogy az uránon kívül más chémiai elemek is vannak (így legelső volt a thorium), a melyek hozzá hasonlóan viselkednek. Így lett aztán az urán-sugarak neve: «Becquerel-sugarak».

Az első kisérletek a következők voltak: Becquerel többféle uránsót sötét helyen, vastag kettősfalú ólomládába zárt. Bizonyos időközökben ólomkeretbe foglalt fényképező lemezt tett a ládába, anélkül, hogy abba a világosság behatolt volna; s mindannyiszor — még hat hó multával is — a kémiai hatás épp oly erős volt, mint kezdetben. Ez oly tulajdonság, a mit eddigelé semmiféle foszforeskáló testnél nem vettek észre. Ha két, elektromossággal megtöltött, elszigetelt testet egymással szembeállitunk, úgy — száraz levegő mellett — a töltések hosszabb időn át alig változnak; de ha az elszigetelt testek közelébe urándarabot hozunk, a levegő vezetővé válik és a kisülés gyorsan bekövetkezik. A kisülés gyorsasága a különböző uránvegyületeknél különböző volt, pl. a fémuráné háromszor akkora volt, mint az uranyl-sulfáté.

Ez új sugarak, a melyeknek tulajdonságai a Röntgen-sugarakéival nagyjában megegyeztek, csakhamar az érdekes kisérletek egész sorát idézték elő. A kisérletek eredményeiből az tűnt ki, hogy az említett tulajdonságok nemcsak az uránnál, hanem mindazoknál a testeknél is előfordulnak, a melyek állandóan uránt, thoriumot tartalmaznak. Sőt ezekből oly testeket is készíthetni, a melyek kisugárzó képessége (radioaktivitása) a megelőzőékénél jóval nagyobb.

P. CURIE és felesége az urán- és a thorium-sugarak vizsgálásánál azt tapasztalták, hogy e fémekkel összeköttetésben valami anyag van, a melynek kisugárzó képessége nagyobb, mint maguké a fémeké. Hogy ezt az anyagot a joachimsthali (csehországi) pechblendéből* különválaszszák, ez utóbbit különböző savakkal kezelték, míg végre a radioaktiv-anyag — kevés bismuttal — visszamaradt. Még hatásosabb terméket kaptak, ha a pechblendét fölmelegitették s azután szublimálták. Ez eljárást többször ismételték, s végül oly anyaghoz jutottak, a melynek radioaktivitása 400-szor nagyobb volt, mint az uráné. Mivel az ismert elemek közül egy sem mutatott ily sugárzó képességet a CURIE-pár azt következtette, hogy a pechblendében egy, még ismeretlen elem van, a melynek analytikai tulajdonságai a bismutéihoz közelállnak. Ez új elemet «polonium»-nak nevezték el.

A kisérleteket a két CURIE ezután BÉMONT társaságában folytatta s ugyanabban az uránérczben még egy második, szintén erősen radioaktiv anyagra akadtak, a mely a poloniumtól chémiai tulajdonságaiban lényegesen különbözött. Noha ez anyag a baryumhoz hasonló és szinképe a baryuméval megegyezik, még sem baryum, mert hiszen a baryum nem lövel ki sugarakat. Kell tehát, hogy a pechblendében a baryummal rokon új elem legyen, a melynek radioaktivitása nagy. Valóban ismételt tisztítás útján ez új elem kisugárzó képességét 900-szor nagyobbnak találták az uránénál. Az igy kimutatott, de még külön elő nem állitott elemnek «radium» nevet adtak.

Ez új elem szinképét E. DEMARÇAY vizsgálta meg pontosabban, s abban 3814·8 hullámhossznak (ROWLAND mértéke szerint) megfelelő elég nagy csikot talált, a mely semmiféle ismert elemnek nem vonala. Ha a radium az uránnál csak 60-szor sugárzott erősebben, a csík alig volt észrevehető; de igen jól látszott, a

* A «pechblende» nevet meghagytam, mint a melyet a Comptes Rendus-ban is igy használnak.

mikor a további tisztitás folytán a radium radioaktivitása az uránénak 900-szorosát érte el.

A pechblendéből alkalmas chémiai kezelés mellett I. Elster és H. Geitel ólomszulfátot kaptak, a melynek radioaktivitása igen nagy volt, holott a tiszta ólomvegyületek hatástalanok. Még kitünőbb radioaktiv preparatumokat készitett F. Giesel, a melyekből pl. 0·3 gramm súlyú üvegcsövecskébe beolvasztva, nappal is világit. Ő az uránsó-gyártás termékeiből legnagyobbrészt kénsavas barytból álló anyagot választott ki, a mely erős Becquerel-sugarakat lövelt és a baryumplatincyanür-ernyőt foszforeskálásra késztette. Ez a preparatum a Curie-k által készitett és radiumot magában foglaló anyaggal azonos tulajdonságú volt, holott nem pechblendéből, hanem egész más uránérczből készült.

Most már minden oldalról és a legkülönbözőbb irányban indultak meg a kisérletek, hogy e különös sugarak sajátságait teljesen megismerjék.

Így Becquerel további kisérleteiben kimutatta, hogy az uránsugaraknál nincs szabályos visszaverődés. Az ónból készült vájt tükör előtt levő uránlemez nem adott képet; de úgy látszott, mintha a tükör, főleg a széle, új sugarak forrásául szolgált volna. Innen van, hogy a besugárzott testek — mint azt Sagnac a Röntgen-sugaraknál is észrevette — másodrendű sugarakat látszanak kilövelni. A radiumkarbonat is lövel ki sugarakat, a melyek — ha különböző szög alatt esnek a fémlemezekre — ezeket fényképező hatással ruházzák fel. A besugárzott test közvetlen közelében — egy millimeterig — annak másodrendű sugárzása jóval intenzivebb volt, mint az elsőrendű; ebből az következik, hogy a másodrendű sugarakat a levegő igen erősen nyeli el.

Ha a radioaktiv anyagot üveglap felé tartjuk, a mely alatt némi távolságban fényképező lemez van; úgy az üveglap árnyékát a kép előhivása után fehér sáv alakjában találjuk meg a külső oldalon, s a sáv annál szélesebb, mennél vastagabb az üveglap. Hasonló jelenséget észlelünk, ha fosforeskáló test van az üveglap felett. Ily esetben az üveglap függőleges szélein az urán-sugaraknál is teljes visszaverődéssel egybekötött törésnek kellene lennie; de sem az üveg, sem az aluminiumhasáb még a legkisebb eltérítést sem tudták felmutatni.

A különböző anyagok sugarainak erőssége igen különböző, s azokat a testek igen egyenlőtlenül nyelik el. Az urán és a rádium oly sugarakat lövelnek ki, a melyeket majd minden test átenged; de a polonium sugarait könnyen elnyelik. Papiros, csillám, kvarcz, mészpát a radium sugarait könnyen, a poloniuméit részint gyöngítve, részint éppen nem is engedik át. Vékony aluminium-lemezen áteső polonium-sugarak hatásosabbak voltak az uránéinál; de viszont, ha 2 mm vastag aluminium-lapon engedjük át a sugarakat, úgy ezután most az uránéi lesznek radioaktivabbak a polonium sugarainál.

Eme kisérleteiből Becquerel arra a meggyőződésre jutott, hogy e különös sugarak a Röntgen-sugarakhoz igen hasonlók. De nem tudta megmagyarázni azt a körülményt, hogy az urán és rokonainak kisugárzása — minden más energia felhasználása nélkül is — oly állandó. Pedig a fényképező lemezre, vagy a platin-cyanürernyőre való hatás energia-felhasználást követelnek, s ennek forrása csakis a sugárzó anyag lehet. Szerinte föl kell tennünk, hogy az említett anyagoknak oly energia-készletük van, a melyeket azok éveken át — észrevehető apadás nélkül — használhatnak.

Hogy az erősen radioaktiv testeknek indukáló erejük van, azaz hatástalan anyagokat hatásosakká tehetnek, azt a két Curie bizonyította be. Ime, ez irányú kisérleteik: poloniumot és radiumot tartalmazó anyagot vízszintes lapra poralakban hintettek el, e fölött néhány milliméter távolságban lebegett a kérdéses lemez, a melyet időről-időre eltávolították, és a melynek radioaktiv erejét a levegővel közölt vezető képessége által határozták meg. E közben arról győződtek meg, hogy a hosszabb ideig kitett lemezeknek radioaktivitása a kitétel idejével nő, néhány óra mulva a növekedés csökken és egy bizonyos határhoz közeledik. Ha az indukált lemezt a radioaktiv anyagtól eltávolították, annak kisugárzó képessége több napon át megmaradt; majd a kisugárzás kezdetben gyorsan, azután mind lassabban fogyott, végre asymptotikusan látszott eltünni.

A mikor a kisérletekhez oly anyagokat használtak, a melyek radioaktivitása 5000—50000-szer nagyobb volt az uránénál, úgy az indukált kisugárzó képesség — azonnal megmérve — 1—15 uránerősség között váltakozott, a ráhatás megszünte után három órával később pedig kezdeti értékének 12-edére szállt le. Indukált lemezek gyanánt zinkumot, aluminiumot, rezet, ólmot, platinát, bismutot, nikkelt, papirost, barium-karbonatot, bismut-szulfurt használtak.

A Becquerel-sugarak energia-forrását megismerni Elster és Geitel tűzték ki czélul. S ámbár kisérleteik eredményeivel az óhajtott czélhoz el nem jutottak, mégis becses az anyag, a melylyel ismereteinket e téren gazdagították.

Egy ellipszoid-alakú, 300 gramm súlyú, körülbelől 7 cm hosszú, 5 cm szélességű és 1·5 cm vastagságú joachimsthali pechblendét használtak radioaktiv anyag gyanánt. Hogy a sugarak intenzitásában mesterségesen idézhessenek elő változást, az emlitett pechblendét evakuálható csőbe zárták, a melyből a sugarak aluminium-lemezen át a levegőre juthattak. Itt vizsgálták meg — a levegőnek különböző vezető képessége mellett — a fényképező lemezre gyakorolt hatásukat; s noha a csőben a levegőt a legnagyobb mértékben megritkitották: a sugárzás intenzitásában semmiféle változást nem vettek észre. Ugyancsak változatlan maradt a pechblende sugárzó energiája, a mikor a kisérleteket a clausthali bánya (Harz-hegység) aknáiban 800 méter mélységben végezték. Elesik tehát az a nézet, mintha a radioaktiv testek a térben már meglevő sugarakat elnyelnék s ezeknek energiáját Becquerel-sugarak energiájává alakitanák át.

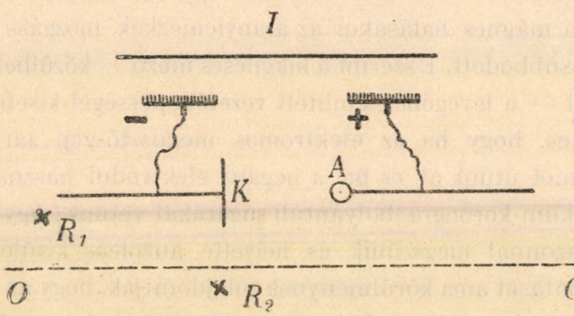
Akkor sem változik a Becquerel-sugarak intenzitása, ha a radioaktiv-anyagra kathód-sugarak esnek, noha az uránvegyületek — kathód-sugarak hatása alatt — Röntgen-sugarakat lövelnek ki. Elster és Geitel uranyl-kaliumszulfatot kathód-sugarak hatása alatt légritkitott térben hoztak élénk foszforeskálásba, s annak a fényképező lemezre való hatását a szabad levegőn vizsgálták meg: a hatás most is ugyanolyan volt, mint a foszforeskálás előtt.

A mágneses mezőnek hatását a levegőnek — a Becquerel-sugarak által előidézett — vezetőképességére Elster és Geitel vizsgálták meg, s e czélra — mivel a mágneses hatáshoz szükséges alacsony gáznyomásnál az uránsó kisugárzó képessége nem elég nagy — GIESEL-féle preparatumot használtak, a melyet platina-csészécskébe tették. Ez utóbbi egyúttal elektród gyanánt szerepelt s a másik elektród vele szemben 2 cm távolságban volt. Mindkét elektródot üvegburába helyezték el, a melyben a levegőt körülbelől 1 mm nyomásra ritkították meg. A platina-csészécskét 500 Voltra töltötték meg. Az elektromosságnak a kisugárzás befolyása alatt keletkező átmenetét a két elektród közt, egy — a második elektróddal összekötött elektroskoppal figyelték meg. Ha most egy patkós elektromágnest úgy alkalmaztak, hogy a sarkokat összekötő egyenes iránya a csészét és elektródot összekötő egyenes irányára merőleges volt, úgy a mágnes hatásakor az aranylemezkék mozgása jelentékenyen lassúbbodott. E szerint a mágneses mező — körülbelől 1 mm nyomásnál — a levegőnek említett vezetőképességét kisebbíti.

Ismeretes, hogy ha az elektromos megosztó-gép sarkai közt szikra-áramot ütünk át és ha a negativ elektródul használt amalgamált zinkum-korongra ibolyántúli sugarakat vetünk: úgy a szikraátmenet azonnal megszűnik és helyette auroleás kisülés áll be. A fény e hatását ama körülménynek tulajdonítják, hogy az ibolyántúli sugaraknak a zinkum-korongra való hatása a levegőben negativ megtöltött részecskéket: «jónokat» létesít. A BECQUEREL-sugarak hatása alatt a levegő kétszeresen jonizálódik, mert benne pozitiv és negativ jónok keletkeznek, még pedig egyenlő mennyiségben. ELSTER és GEITEL azt találták, hogy az említett tüneménynek BECQUEREL-sugarakkal való előidézésénél negativ elektród gyanánt nemcsak zinkum, hanem bármely más fém is szerepelhet; továbbá, hogy a kisülés neme megváltozik.

I megosztó-gépnek negativ sarkával mintegy 10 cm átmérőjű, tetszőleges fémből készült s elszigetelt *K* korong áll összeköttetésben (1. ábra). Ezzel szemben kb. 1 cm átmérőjű *A* anódgömb van. Mihelyest R_2 radiumpreparatummal annyira közeledünk a sarkokhoz, hogy annak BECQUEREL-sugarai *A* és *K* között keresztülhatolhatnak, a szikra- vagy nyalábkisülés rögtön megszakad. De a sötétben látható, hogy az említett sugarak hatása alatt a szikrakisülés auroleásba megy át és az *A* gömböt ibolyaszínű auroleás sapka fedi be.

Megszünik az auroleás kisülés, ha a sugárzás hatását a sarkokon OO 1 mm vastagságú ólomernyővel megakadályozzuk, hogy helyet adjon az előbbi kisüléseknek. Ha a kathód felületét megnagyobbítjuk úgy, hogy a fémkorong helyébe 25—30 cm átmérőjű félvezető kartonlapot teszünk: a Becquerel-sugarak hatása a nyalábkisülésre oly erős lesz, hogy a távolság R_2 és K között az egy métert s meghaladhatja; sőt a preparatum még a kartonlap mögé R_1-be s tehető. Ha a radioaktiv-anyagot 6 mm falvastagságú ólomszekrénybe zárjuk el, a fenti jelenség csak akkor szünik meg, a mikor R_2 és K távolsága 25—25 cm.-nél nagyobb.



1. ábra.

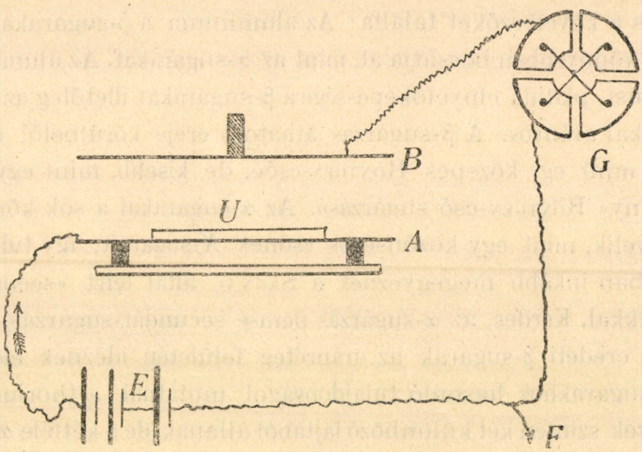
Nem kevésbbé érdekesek azok a mélyreható vizsgálódások, a melyeket E. Rutherford az uránsugarak* elektromos hatásainak megismerése szempontjából végzett, és az a sajátszerü egyéni felfogás, a melylyel e jelenségeket megmagyarázni iparkodik.

Hogy az urán-sugarak a gázokat vezetőkké teszik, azt Rutherford a következő kisérletekkel mutatta ki. Két egyközű, 20 négyzetcentiméteres szigetelt zinkum-lemezt, A és B (2. ábra), egymástól 4 cm távolságban, vízszintesen szilárdan erősített meg. Az alsó zinkum-lemezt egy 50—200 voltos E galvántelep egyik sarkával, a felsőt G elektrometernek egyik kvadráns párjával kötötte össze, a másik kvadráns-párt és a telep másik sarkát a földbe vezette (F). Ha most az alsó lemezre fémuránból vagy valamely vegyületéből

* Rutherford mindenütt «urán-sugarakat», «urán-sugárzást» emlit.

egyenletesen eloszlott U réteget helyezett, úgy a két lemez közt levő levegő vezetővé válik, a mit az elektrometer kiütése mutatott ki.

Rutherford azt találta, hogy az uránréteg felett elhelyezett fémlapocskák a sugarak egy részét elnyelték és a kiütést kisebbítették. És pedig, ha a fém vastagsága aritmetikai haladványban nő, a levegőnek — az urán-sugarak által okozott — vezetőképessége geometriai haladvány arányában fogy. Ha több vékony aluminiumlemez van egymás felett, úgy az elnyelés az előbbi törvénynek meg-



2. ábra.

felelőleg csak bizonyos meghatározott számig következik be. Így 0·005 mm vastag lemezekből négy a sugárzás értékét egy huszadra szállította le, míg az 5-ik s a következő jóval megkisebbítette. E körülményből Rutherford azt következtette, hogy az urán-sugarak két különböző részből vannak összetéve: egy könnyen elnyelhető részből, az «α-sugarak»-ból és egy áthatóbb részből a «β sugarak»-ból. A β-sugarak meglehetősen homogének, s a különböző anyagokon könnyebben haladnak át, mint az α-sugarak. Valamennyi uránvegyület kibocsátja mind a két sugárnemet. Az α-sugárzás erőssége leginkább az uránvegyületek felületétől, a β-sugárzás pedig a réteg vastagságától is függ. A különböző urán-sóktól kilövelt sugarak —

erősségüket illetőleg — egymással nehezen hasonlíthatók össze, mert itt irányadó a sónak a sugárzó rétegben való eloszlási módja. RUTHERFORD azt hiszi, hogy a pechblendének rendkívüli nagy kisugárzása, a melynek okát a CURIE-pár új elemekben kereste, csakis a finom anyag eloszlásától ered.

A radioaktiv anyagnak a fényképező lemezre való hatása megegyezik azzal, a melyet a kizárt α-sugarak behatása mellett nyerhetni; így valószínű, hogy a fényképező hatás főleg a β-sugaraktól ered.

A különböző fémek átbocsátó képességét is megvizsgálta RUTHERFORD, s a következőket találta: Az aluminium a β-sugarakat százszorta könnyebben bocsátja át, mint az α-sugarakat. Az aluminium, réz, ezüst, platina elnyelőképessége a β-sugarakat illetőleg az atomsúlyokkal arányos. A β-sugárzás áthatoló ereje körülbelől ugyanolyan, mint egy közepes RÖNTGEN-csőé, de kisebb, mint egy ú. n. «kemény» RÖNTGEN-cső sugárzásé. Az α-sugarakat a sók könnyebben nyelik, mint egy közönséges csőnek X-sugarait, így tulajdonságaikban inkább megegyeznek a SAGNAC által leírt «secundär»-sugarakkal. Kérdés, az α-sugárzás nem-e secundär-sugárzás, a melyet az eredeti β-sugarak az uránréteg felületén idéznek elő? Az urán-sugarakhoz hasonló tulajdonságot mutatnak a thoriuméi is, a melyek szintén két különböző fajtából állanak, de a kétféle α-sugár áthatoló ereje nem egyenlő.

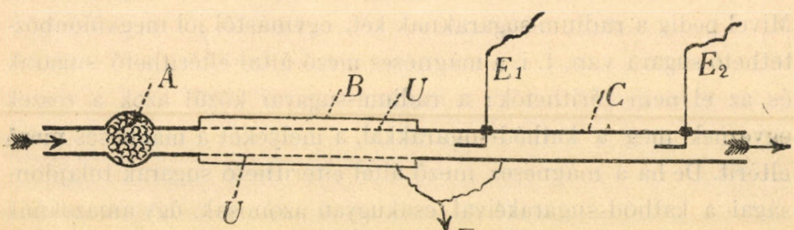
Az urán-sugarakat a megfelelő sűrűségű gázok elnyelik és pedig legcsekélyebb mértékben a hydrogen, legjobban a szénsav. A sugárzás erősségét értékének felére szállítja le egy 3 mm-es szénsav-, 4·3 mm.-es levegő-, 7·3 mm-es világító gáz-, 16·3 mm-es hydrogenréteg. Az elnyelés a nyomással arányosan nő.

Az elektromosság vezetése, a melyet az urán-sugarak a gázokban hoznak létre, eleinte a nyomással nő, később lassabban mint a nyomás. Az arányosság a vezetés és a nyomás közt legszabályosabb a hydrogénnél, legkevésbbé az a szénsavnál. A különböző gázok vezetőképességének viszonya még az elektródok egymástól való távolságától is függ.

Az urán-sugarak kisütő képességének meghatározására RUTHER-

FORD a következő berendezést használta: A gazometerből A gyapot dugón át — a mely a levegő porát felfogja — levegő ömlik B és C fémcsövekbe (3. ábra), a melyeknek a földdel való összeköttetése F-ben van. A C csőben két E_1 és E_2 elektród egymás után nyúlik be, a melyek egy elektrometer kvadránsával vannak összekötve. Az egyik elektród 30 Volt töltést kapott. A 4 cm átmérőjű B-cső belső falát finoman eloszlott U urán-anyag borította. Ha most a levegő csakis a második csövön áramlott keresztül, úgy az elektrometer semmi változást nem mutatott; de folyton csökkent a töltés, ha a légáram előbb az urán-csövön haladt át és pedig mindaddig, míg az elektródok kisültek.

A levegőben az urán-sugarak hatása alatt jónok képződnek, de azok nemsokára újból egyesülnek s a kisütő képesség alább hagy.



3. ábra.

Az idő, a mely alatt az jónok felerészben egyesülnek — RUTHERFORD szerint — 1·3 másodperczre rúg és az újból egyesülés a gázban levő iónok számának négyzetével arányos. Kisérletei továbbá még azt is mutatták, hogy az jónok sebessége úgy a RÖNTGEN-, mint az urán-vezetésnél megegyezik. A negativ jónok sebessége valamivel nagyobb a positivokénál.

RUTHERFORD megvizsgálta az urán-sugarak befolyása alatt álló elektromótoros erő és áramerősség kölcsönös vonatkozását s eredményei a következők: Ha az elektromótoros erő csekély, úgy annak növekedésével az áramerősség az OHM törvényének közelítően megfelelőleg nő; de ha az elektromótoros erő nagy, akkor az áramerősség növekedése csekély. A hydrogen és szénsavnál az áram már igen csekély elektromótoros erőnél eléri végleges erősségét. Az uránlemez pozitiv vagy negativ töltése jelentékenyen befolyásolja az áramgörbék menetét. A gázok csekélyebb nyomásnál könnyebben elérik az áramerősség végleges értékét, mint a magasabbnál.

A hőmérsékletnek a befolyását a kisugárzás intenzitására legelőször Elster és Geitel tanulmányozták, majd később O. Behrendsen, Meyer és Schweidler. Közülök csak Behrendsen mutatta ki a hőmérséklet hatását, a többiek kisérleteiből semmiféle befolyásra nem lehetett következtetni.

Hogy a mágneses mezőnek a Becquerel-sugarakra van hatása és hogy a különböző radioaktiv testek a mágneses mezőben különbözőképen viselkednek, azt Giesel, Meyer és Schweidler, Becquerel, a két Curie mutatták ki. S épp ez a körülmény az, a mely határozottan a mellett bizonyít, hogy a Becquerel-sugarak tulajdonságra nézve a kathód-sugarakkal legnagyobb mértékben megegyeznek. Mivel pedig a radium-sugaraknak két, egymástól jól megkülönböztethető sugara van, t. i. a mágneses mező által eltéríthető sugarak és az el nem téríthetők: a radium-sugarai közül azok a részek egyeznek meg a kathód-sugarakkal, a melyeket a mágneses mező eltérít. De ha a mágneses mező által eltéríthető sugarak tulajdonságai a kathód-sugarakéival csakugyan azonosak, úgy amazoknak is negativ elektromos töltésüeknek és az elektromos mező által eltéríthetőknek kell lenniök. Az elsőt a Curie-pár, az utóbbit Becquerel mutatta ki.

Ám lássuk az idevágó kisérleteket.

P. Curie a különböző eltérítés nagyságát is megmérte a következő berendezéssel. A radioaktiv anyagot ólomtömeggel vette körül, úgy hogy az sugarait csakis egy irányban, a kondenzátor lemezei közé lövelhette. E lemezek egyike az elektromos forrással van összeköttetésben és állandóan 500 Volt potencziál töltésű; a másika az elektrometerhez vezet. A Becquerel-sugarak a levegőt a kondenzátor lemezei között vezetővé teszik, minek folytán áram keletkezik s annak intenzitása az elektrometeren lemérhető. Ha most a sugarakat az elektromágnes hatásának teszszük ki, azok eltéríttetnek és az áram megszűnik.

Az eltérítés a radioaktiv testeknek a kondenzátortól való távolságától függött. Ha a kettő között a távolság elég nagy, kb. 7 cm volt, akkor egy 2500 *C. G. S.* egységű mágneses mező a kondenzátorhoz érkező összes sugarakat eltérítette. De mikor az említett távolság 7 cm-nél kisebb volt, akkor a mágneses mező a sugaraknak csak egy részét térítette el és pedig annál kevesebb részt, mennél kisebb lett a távolság, még akkor is, ha a mágneses mező erőssége 7000 egységre emelkedett. P. Curie egyik kísérlete alapján a következő sorozatot állította össze: Jelöljük 100-zal azt az áramot, a melyet a Becquerel-sugarak az elektromágnes befolyása nélkül keltenek, akkor a mágneses mező hatása alatt, ha a távolság cm-ekben:

$$7{\cdot}1,\ 6{\cdot}9,\ 6{\cdot}5,\ 6{\cdot}0,\ 5{\cdot}1,\ 3{\cdot}4;$$

az el nem térített sugarak által keltett áram megfelelőleg:

$$0,\ 0,\ 11,\ 33,\ 56,\ 74.$$

Ez utóbbi számok egyúttal az el nem térített sugarak százalékait is kifejezhetik.

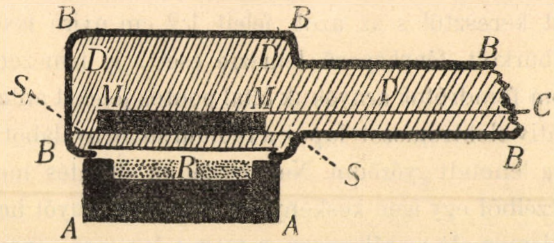
De P. Curie nem csak azt mutatta ki, hogy a Becquerel-sugarak két részből állanak, ú. m. a mágneses mező által eltéríthető és el nem téríthető sugarakból, hanem azt is, hogy az eltéríthető sugarak áthatoló képessége a legnagyobb. Mert az aluminiumon vagy fekete papiroson átbocsátott összes sugarak eltéríthetők voltak, e szerint az el nem téríthető sugarakat az aluminium és a fekete papiros elnyelték. A kondenzátor nagyobb távolságnál elég egy 0·01 mm-es aluminium lemezke, kisebb távolságnál pedig két ilyen, hogy az el nem téríthető sugarakat kizárja.

A mágneses mező által el nem téríthető sugarakat behatóbban Sklodawska Curie tanulmányozta. E czélra főleg a polonium sugarait használta fel, a melynél azt találták, hogy csak el nem téríthető sugarakat lövell ki. A két különfajtájú sugár közt a különbség leginkább abban nyilvánult, hogy a különböző testeken különbözőkép hatolnak át. Míg ugyanis az elnyelési együttható az eltéríthető sugaraknál csökkent, vagy állandó is maradt, a mikor a test vastagsága — a melyen a sugarak áthatoltak — növekedett; addig az e nem téríthető sugaraknál az elnyelés annál könnyebben történt, mennél nagyobb volt az illető anyag vastagsága. Továbbá az el nem téríthető sugarakat az aluminiumlap annál erősebben nyelte el, mennél nagyobb volt távolsága a radioaktiv testtől.

Az el nem téríthető sugaraknak egyenes irányú terjedését Becquerel mutatta a következő kísérlettel: A poloniumot kemény papirból készült igen keskeny csatornába helyezte, úgy hogy itt csak egyenes vonalú kisugárzás történhetett. Ezzel egyközűen 4·9 mm távolságban 1·5 mm átmérőjű rézsodrony feszült, a melylyel szintén egyközűen 8·65 mm távolságban a fényképező lemez volt. Tiz percznyi kitétel után megjelent a sodronynak geometriai árnyéka a megfelelő méretben és mindkét oldalon a keskeny félárnyék. A tüneményt nem változtatta meg a közbe helyezett kettős aluminium-lap sem.

Azoknak a radium-sugaraknak tulajdonságait, melyeket a mágneses mező eltérít és a melyek fekete papiroson áthatolnak, Becquerel a következőknek találta: A levegőnek e sugarak terjedési sebességére nincs befolyása, mert a mágneses eltérítés a légüres térben és a levegőben teljesen megegyező. A radiumnak különböző sói egyenlően eltéríthető sugarakat lövellnek ki, tehát egyforma természetűek s egymástól csak intenzitásukban különböznek. Azok a sugarak, a melyek valamely egyenletes mágneses mezőre merőlegesen terjednek tova, zárt pályát írnak le s e pálya a kilövellési ponthoz tér vissza. Az eltéríthető sugárnyalábot a mágneses mező kisugárzásszerűleg szórja szét oly görbékben, a melyeknek görbületi sugarai külünbözők; de különböző a rácsokon keresztül való elnyelés is, még pedig változik a rácsok természetével és helyzetével.

Hogy a radiumnak eltéríthető sugarai — épp úgy, mint a kathódsugarak — negativ elektromos töltésüek, azt a Curie-pár mutatta ki. Mivel a radium-sugarak elektromos töltése jóval kisebb, mint a kathód-sugaraké, azért e töltés kimutatására a levegőt távol kell tartani, a mit vagy az által érhetni el, hogy teljesen légüres teret használnak, vagy hogy a sugarakat elnyelő vezetőt jó szigetelő közé foglalják be. A két Curie ez utóbbi eljárást választotta; kisérletükben az $M\ M$ fémkorong, a melyet C fémnyél az elektrometerrel köt össze, $D\ D\ D$ szigetelő anyagba teljesen beleillett (4. ábra). Az egész szerkezetet *B B B* fémburok veszi körül, a mely a földdel vezető összeköttetésben van. Az *M M* korong egyik oldalán *S S* szigetelő és a fémburok igen vékonyak. Ezt az oldalt tesszük ki az *A A* ólomvályúba helyezett radioaktiv *R* bariumsó kisugárzásának. A radium által kilövelt sugarakat, a melyek a külső fémburkon és *S S* vékony szigetelő lemezen áthatolnak, *M M* vezető-korong elnyeli, s így az a folyton képződő negativ elektromosságnak székhelyévé válik. Ez elektromosság az elektrometerrel azután könnyen lemérhető. Természetesen az így nyert áram igen gyönge volt. A Curie-pár nagy radioaktivitású chlorbariummal, a melynek alja 2·5 cm^2 és vastagsága 0·2 cm volt, mindössze is 10^{-11} Ampère-es áramot kapott, minek-



4. ábra.

utána az *M M* korong által elnyelt hatásos sugarak 0·01 mm vastag aluminiumon és 0·3 mm-es eboniton hatoltak át. Az eredmény akkor sem változott, a mikor *M M* fémkorong gyanánt egymásután ólmot, rezet, zinkumot; szigetelő gyanánt pedig ebonitot és paraffint alkalmaztak.

Majd megfordítottan is végezték kisérletüket, t. i. az ólomvályút a szigetelő közepébe helyezték s ezt kötötték össze az elektrometerrel. A szigetelőt újból fémkerettel vették körül, a melyet a földdel kötöttek össze. Az elektrometer most pozitiv elektromosságot mutatott, még pedig épp oly nagyságút, a minő az első kisérlet negativ töltése volt. A radium-sugarak tényleg áthatoltak a szigetelő *S S* vékony lemezén, a belső vezetőt elhagyták és negativ elektromosságukat magukkal vitték.

Valóban szép kisérlettel mutatta ki Becquerel a radium-sugarak eltérítését az elektromos mezőben. Két négyszögletes és 3·45 cm. magas rézlapot függőlegesen erősitett meg s közöttük 1 cm vastag levegő réteget hagyott. Ez intervallumban mérte aztán az elektromos mezőt a két lap potencziál különbsége által. Az egyik lapot a földdel, a másikat a statikai elektromosság forrásával kötötte össze. Fődolog itt az volt, hogy igen keskeny sugárnyalábot állitson elő. E végből egyik kisérleti sorozatában a radioaktiv anyagot kis ólomedénybe helyezte, a melyet kb. 1·5 mm. nyilású ólomlappal fedett be; egy másik kisérleti sorozatban a radium-sót egy egyenes vonalú 1 mm széles vályúba hintette s az egész szerkezetet kis ólomtuskóba foglalta. Minden alkalommal a sugárforrás a két lap alatt foglalt helyet úgy, hogy a hatásos sugárnyaláb pontosan a két rézlap között ment keresztül s az azok felett 1·2 cm-nyire levő, fekete papirosba burkolt fényképező lemezre esett. E lemezen közbeiktatott finom fémdrótok árnyékuk által pontos jeleket adtak. Arról, hogy a negativ elektromozott lapok a radium sugárnyalábot eltérítik, azonnal meg lehetett győződni. Nehézséget az eltérítés megmérése okozott. E czélból egy igen keskeny, jól szigetelő ernyőt helyezett a fényképező-lemez elé merőlegesen, a mely a lemezre egyenes, igen keskeny árnyékot vetett. Ez ernyővel sikerült az előbb említett 1 mm. széles nyiláson kilövellt sugárnyaláb irányát követni; a mennyiben az csak akkor volt az ernyő mindkét oldalán egyenlő, a mikor semmiféle eltérítés nem történt. Ellenben, ha a sugárnyalábot egyik irányban térítette el, annak egy részét az ernyő elfödte és ez árnyékot vetett a fényképező lemezre. Ez árnyék iránya határozta meg egyuttal az eltérítés irányát. Becquerel kisérleteit $1{\cdot}02.10^{12}$ és $1{\cdot}29.10^{12}$ *C. G. S.* intenzitású elektromos mezőkben végezte és $1{\cdot}02.10^{12}$ *C. G. S.* intenzitás (10,200 Volt a két lap közt) mellett a radium-sugarak kb. 0·4 cm eltérítést mutattak.

Irodalom. H. Becquerel munkálatai, Comptes Rendus 1896—1900. — O. Behrendsen-é, Wiedemann Annalen d. Ph. u. Ch. 1899. — G. Bémont-é, C. R. 1898. — P. és S. Curie-é, C. R. 1898—1900. — E. Demarçay-é, C. R. 1898. — J. Elster és H. Geitel-é, Wied. Ann. 1898—1899. és XI. Jahresb. d. Vereins f. Naturwissensch. in Braunschweig 1898—1899. — F. Giesel-é,

Wied. Ann. 1899. — St. Meyer és E. v. Schweidler-é, Wiener Akad. Anzeiger. 1899—1900. — E. Rutherford-é, Philosophical Magazine. 1899. — G. C. Schmidt-é, Wied. Ann. 1898. — Általános ismertetések: Naturwissenschaftliche Rundschau. 1896—1900. — Revue générale des Sciences. 1896—1900. — Zeitschrift f. d. phys. u. chem. Unterricht. 1897. 1899. 1900. évfolyamaiban.

Szekeres Kálmán.

A Mathematikai és Physikai Társulat VI. és VII. tanulóversenye.

A Társulat VI. tanulóversenye 1899. évi október 14-én tartatott meg. Általános lefolyásáról és eredményéről beszámolt már a 7. rendes közgyűlés titkári jelentése (IX. évf. 247. lap), úgy hogy e helyen teljesség kedveért csupán a biráló bizottság jegyzőkönyve közlendő:

A beérkezett dolgozatokat a Math. és Phys. Társulatnak Kőnig Gyula elnöklete alatt Bartoniek Géza, Beke Manó, Eberling József, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Rados Gusztáv, Rátz László, Szekeres Kálmán és Szijártó Miklós tagokból álló bizottsága átvizsgálta és egyhangúlag azt határozta, hogy az első díjat Kornis Ödönnek, a pécsi főreáliskola és Maksay Zsigmond tanár növendékének itéli, a ki mind a három feladványt röviden és világosan oldotta meg és ezzel mathematikai képességének szép jelét adta.

A második díjat Spiczer Ödön a budapesti VIII. ker. főreáliskola és Kopp Lajos tanár növendékének itéli a bizottság, a ki szintén megoldotta mind a három feladványt, habár a fogalmazásában nem fejtett ki kellő szabatosságot.

E két jutalmazandónak itélt dolgozat mellett dicséretre méltónak tartja Devecis del Vecchio Mihály dolgozatát, a ki a harmadik feladat megoldásában mutatott ügyességet.

Budapest, 1899 október 25-én.

Szijártó Miklós, mint előadó. *Kőnig Gyula,* biz. elnök.

*

A Math. és Phys. Társulat VII. tanulóversenyét f. évi október hó 13-án tartotta meg egyidőben Budapesten és Kolozsvártt. Amott 53, itt 5 tanuló jelent meg, a ki a versenyben részvételének jogosultságát érettségi bizonyítványnyal igazolta.

A tételek a következők voltak:

I. Legyenek a, b, c, d és m oly egész számok, hogy

$$am^3+bm^2+cm+d$$

osztható 5-tel, de d nem osztható 5-tel. Bebizonyítandó, hogy akkor mindig található oly n egész szám, hogy

$$dn^3+cn^2+bn+a$$

szintén osztható 5-tel.

II. Megszerkesztendő az ABC háromszög, ha adva van az AB oldal, továbbá a háromszög oldalait érintő négy kör közül annak a kettőnek sugara, melyek az AC és BC oldalakat belülről érintik.

III. Egy 300 m. magas szikláról egymásután szabadon leesik két vízcsepp. Az első már $\frac{1}{1000}$ mm-t esett, mikor a második megkezdi esését. Hány mm-nyire lesz egymástól a két vízcsepp abban a pillanatban, mikor az első a sziklának talpához ér? (Az eredmény $\frac{1}{10}$ mm-nyi pontosságig számítandó; levegő ellenállása stb. nem veendő tekintetbe).

A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a Társulat nagyszámú érdeklődő tagjának felügyelete alatt ment végbe. Folyamatában semminemű szabálytalanság nem fordult elő, a miről a helyszínen felvett jegyzőkönyv tanúskodik. A versenydolgozatok elkészítésére engedélyezett négy óra alatt Budapesten 30, Kolozsvártt egy dolgozat sem adatott be. A jelentkezők összes száma a mult évihez négygyel, a beadott dolgozatok száma ellenben 11-gyel csökkent.

A versenyen készült dolgozatok az ellenőrző tagok felügyelete alatt lepecsételtettek s elbirálásukra az elnökség Kőnig Gyula elnöklete alatt tíztagú bizottságot küldött ki, melynek jelentése a következő:

Az idei dolgozatok, noha a feladatok nem voltak nehezebbek, mint az előző években, sőt részben még könnyebbek voltak, nem ütik meg az eddig alkalmazott mértéket, a mennyiben az eddig jutalmazott versenyzők, bár részben fogyatékosan, de mind a három feladatot megoldották. Éppen ezért a biráló bizottság (melyben az alólirottakon kívül Eberling József, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Rados Gusztáv és Szekeres Kálmán vett részt) első díjat egy versenyzőnek sem véleményez. Juvantz Irén és Smodics Kázmérnak azonban, mivel két feladatot megoldottak, egy-egy második díjat javasol odaitélni.

Budapest, 1900 november 1-én.

Szijártó Miklós, mint előadó. *Kőnig Gyula,* biz. elnök.

E jelentést a választmány egyhangúlag magáévá téve, elhatározta, hogy Juvántz Irén, a nyiregyházi ág. ev. főgymnasium és Mészáros Ferencz tanár növendékének és Smodics Kázmér, a veszprémi főgymnasiumnak és Eberhaldt Béla, Takács József és Balog Sándor tanárok növendékének egy-egy második br. Eötvös-díjat itél oda.

Ebből kifolyólag báró Eötvös Loránd elnök a két díjat a Társulatnak november 8-án tartott első rendes ülésén buzdító, a nyertesek volt tanárait is kitüntető szavak kiséretében adta át.

Az ünnepi hangulatba azonban fájdalmas érzés is vegyült. Az első tanulóverseny nyertesét két évvel ezelőtt kellett elsiratnunk, és szomorú véletlen úgy akarta, hogy éppen a díjat odaitélő ülés előtt hozták meg a tavalyi verseny első nyertesének, Kornis Ödön elhunytának hirét. Elnök mélyen átérzett szavakkal emlékezett meg a fiatalon elköltözött társainkról.

Az ülés érdekét fokozta, hogy ezúttal Zemplén Győző és Visnya Aladár, a III. tanulóverseny nyertesei tartottak előadást physikai és mathematikai önálló kutatáson alapuló tárgyról.

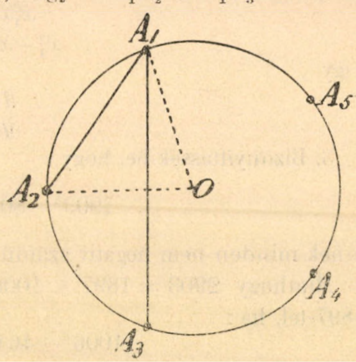
A Mathematikai és Physikai Társulat VI. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

1. Kornis Ödön dolgozata.

1. Az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontok az egységnyi sugarú kört 5 egyenlő részre osztják; bizonyíttassék be, hogy, hogy az $\overline{A_1A_2}$ és A_1A_3 húrok között az:

$$(\overline{A_1A_2} \, . \, \overline{A_1A_3})^2 = 5$$

egyenlőség áll fenn.



Felirhatom:

$$\overline{A_1A_2} = 2 \sin 36^\circ$$

s így

$$\overline{A_1A_3} = 4 \sin 36^\circ \cos 36$$

Következőleg:

$$\overline{A_1A_2} \, . \, \overline{A_1A_3} = 8 \sin^2 36^\circ . \cos 36^\circ \quad a)$$

Tudván már most, hogy $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, a 2-szeres szög függvényeit ismeretes képletek segélyével meghatározhatom s a nyert számértékeket a)-ba téve, nyerem a müveletek végzése után:

$$\overline{A_1A_2} \, . \, \overline{A_1A_3} = \sqrt{5}$$

$$(\overline{A_1A_2} \, . \, \overline{A_1A_3})^2 = 5.$$

2. Legyenek az

$$x^2-(a+d)x+ad-bc = 0$$

egyenletnek gyökei x_1 és x_2; bizonyíttassék be, hogy akkor az

$$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3 = 0$$

egyenletnek gyökei x_1^3 és x_2^3.

---

* A dolgozatok változtatás és javitás nélkül közöltetnek. Tárgyhalmazat miatt eddig elhalasztva közlése az első nyertes iránt immár kegyelet is. Szerk.

Az első egyenletből:

$$x_1x_2 = ad-bc \quad \text{és} \quad x_1+x_2 = a+d \qquad \alpha)$$

A másodikból

$$y_1y_2 = (ad-bc)^3 \quad \text{és} \quad y_1+y_2 = (a^3+d^3+3abc+3bcd) \qquad \beta)$$

α) alatti egyenletek másodikát köbre emelve:

$$x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2) = (a+d)^3$$

Ez egyenletbe α) alatti értékeket téve x_1x_2 és x_1+x_2 helyébe, nyerem:

$$x_1^3+x_2^3 = a^3+d^3+3abc+3bcd \qquad \gamma)$$

α) β) és γ) alatti egyenletekből, következik:

$$x_1^3x_2^3 = y_1y_2$$
$$x_1^3+x_2^3 = y_1+y_2$$

s így

$$y_1 = x_1^3$$
$$y_2 = x_2^3$$

3. Bizonyíttassék be, hogy:

$$2903^n-803^n-464^n+261^n$$

n-nek minden nem negativ számú értékénél 1897-tel osztható:

Minthogy $2903 = 1897 + 1006$, tehát a megadott kifejezés osztható 1897-tel, ha:

$$(1006^n-464^n)-(803^n-261^n)$$

Ámde minthogy $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$ egész szám mindig, világos, hogy

$$\frac{1006^n-464^n}{1006-464}-\frac{803^n-261^n}{803-261} = \frac{1006^n-464^n-(803)^n+(261)^n}{542}$$

is egész szám. Ámde $542 = 2.271$ s így az adott kifejezés 271-el osztható.

Ámde csoportosíthatom a feladott szám tagjait így is:

$$1006^n-803^n-(464^n-261^n)$$

Világos, hogy a fentebbiek szerint:

$$\frac{1006^n-803^n}{1006-803}-\frac{464^n-261^n}{464-261} = \frac{1006^n-803}{203}-\frac{464^n-261^n}{203}$$

is egész szám. Ámde $203 = 7.29$ s így a megadott kifejezés 7-tel is osztható, következőleg osztható $7.271 = 1897$-tel is.

2. Spiczer Ödön dolgozata.

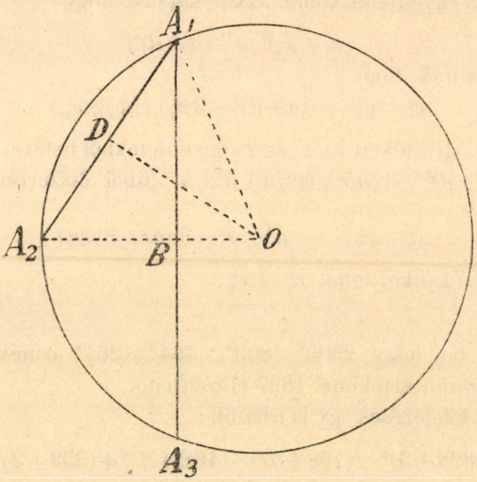
1. feladat:

Az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontok az egységnyi sugaru kör kerületét 5 egyenlő részre osztják; bizonyíttassék be, hogy az A_1A_2 és az A_1A_3 húrok között az:

$$(\overline{A_1A_2}\,.\,\overline{A_1A_3})^2 = 5 \text{ egyenlőség áll fenn.}$$

Ha a kör közepe O, és az O-ból az A_1A_2 és A_1A_3 húrokra bocsájtott merőlegesek talppontjai D és B, akkor:

$$\text{I.}\quad A_1A_2 = 2A_1D = 2A_1O \sin A_1OD\sphericalangle = 2 \sin 36^\circ \quad \text{és}$$
$$\text{II.}\quad A_1A_3 = 2A_1B = 2A_1O \cos OA_1B\sphericalangle = 2 \cos 18^\circ$$



Szorozzuk e két egyenletet és emeljük négyzetre, akkor kapjuk, hogy:

$$(A_1A_2\,.\,A_1A_3)^2 = (4 \sin 36^\circ \cos 18^\circ)^2 = (8 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 18^\circ)^2$$
$$= (8 \cos^2 18 \sin 18^\circ)^2 = [8\,(1 - \sin^2 18^\circ) \sin 18^\circ]^2$$

Ismeretes, hogy $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, tehát

$$(A_1A_2\,.\,A_1A_3)^2 = \left[8\left(1 - \left(\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right)^2\right)\left(\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right)\right]^2,$$

a miből összevonás útján keletkezik, hogy

$$(A_1A_2\,.\,A_1A_3)^2 = 5.$$

2. feladat:

Legyenek az $x^2-(a+d)\,x+ad-bc = 0$ egyenletnek gyökei x_1 és x_2; bizonyíttassék be, hogy akkor az:

a) $y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$ egyenletnek gyökei x_1^3 és x_2^3.

Ismeretes a másodfoku egyenletek elméletéből a következő összefüggés:

$$1)\quad x_1x_2=ad-bc \quad \text{és}$$
$$2)\quad x_1+x_2=-(a+d).$$

Ha az *a)* egyenlet gyökei x_1^3 és x_2^3, akkor kell, hogy

$$3)\quad x_1^3 \cdot x_2^3=(ad-bc)^3$$

és 4) $x_1^3+x_2^3=-(a^3+d^3+3abc+3bcd)$ legyen.

A 3) egyenlet helyessége az *a)* egyenletből kitünik; a 4)-ik egyenlet igaz voltát pedig a következőleg bizonyítjuk:

emeljük a 2) egyenletet köbre, akkor kapjuk, hogy

$$(x_1+x_2)^3=-(a+d)^3,$$

a mit így is irhatunk, hogy

$$x_1^3+x_2^3=-(a+d)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$

x_1x_2 és x_1+x_2 értékeit az 1) és 2) egyenletekből betéve, kapjuk, hogy: $x_1^3+x_2^3=-(a+d)^3+3(ad-bc)(a+d)$, a miből összevonás után ered, hogy:

$$x_1^3+x_2^3=-(a^3+d^3+3abc+3bcd)$$

A *a)* egyenlet gyökei tehát x_1^3 és x_2^3.

3. feladat:

Bizonyítsuk be, hogy $2903^n-803^n-464^n+261^n$ n-nek minden nem negativ egész számu értékénél 1897-el osztható.

A megadott kifejezések így is irhatók:

$$\text{I.}\quad (2898+5)^n-(798+5)^n-(462+2)^n+(259+2)^n$$
$$\text{II.}\quad (2710+\mathit{193})^n-(542+\mathit{261})^n-(271+\mathit{193})^n+(0+\mathit{261})^n$$

A I egyenletben a binomok mindegyik első tagja osztható 7-el. Ha az első binómot $(2898+5)^n$ kifejtjük, látjuk hogy annak minden egyes tényezője osztható 2898-al, tehát 7-el, csak az utolsó $+5^n$ nem, ugyanígy van a kifejezés második binómjánál, ott $-(5)^n$ nem osztható 7-el; ámde $(+5)^n$ $-(5)^n$ egymást megsemmisíti; ugyanígy a kifejezés harmadik és negyedik tagjánál $+(2)^n$ és $-(2)^n$; a miből következik, hogy az I. kifejezés 7-el osztható.

A második (II) kifejezéssel hasonlókép eljárva, kimutathatjuk, hogy az 271-el osztható. Ámde $271.7=1897$, a miből tehát következik, hogy a megadott kifejezés osztható 1897-el.

A NEHÉZSÉG ÉS A MÁGNESES ERŐ NIVÓFELÜLETEINEK ÉS VÁLTOZÁSAINAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

Az 1900-ik évi párisi physikai congressus elé terjesztett jelentés

b. EÖTVÖS LORÁND-tól.

A nehézségre vonatkozó kutatások az utolsó évtizedek rendszeres munkálatai által ma már a részletezés állapotához jutottak. Nem elégszünk már meg az ezen erő változásaira vonatkozó általános, közelitőleg az egész földre érvényes szabályok felállitásával, hanem e változásokat helyről-helyre kutatva azoknak pontosabb és pontosabb megismerésére törekszünk. Ennek a kutatásnak eredményei nemcsak a geodetára és a physikusra, hanem a geologusra nézve is érdekesekké kezdenek válni.

A terv, a mely szerint ez a kutató munka mind ez ideig folyt, a nehézség irányának és nagyságának meghatározása volt lehetőleg sok, lehetőleg jól megválasztott egyes pontokban ; segédeszközök gyanánt erre majdnem kizárólag az inga és a libella szolgáltak.

Előadó a congressus figyelmét e tervszerű munkának egy újabb kiegészitésére kivánja irányitani. Ez maguknak a nehézség változásainak egyes pontok körül, vagy szigorúabban kifejtve az ezen erőt előállitó összetevők differentiálhányadosainak közvetetlen meghatározása egyes pontokban. Előadó 1896-ban a Wiedemann Annalenben közzétett értekezésében kimutatta ennek lehetőségét, s e czélra berendezett torsiómérlegeivel ilyen méréseket tényleg jó sikerrel eszközölt. A kérdésnek rendszeres tanulmányozása ezen az úton valóban ismereteink nem megvetendő gazdagodásával kecsegtet. Mert hiszen az erő differentiálhányadosai egy pontban megállapitják ott a nivófelület görbületét, főgörbületeinek irányát s az azok közötti különbséget, kifejtik az erő irányváltozásait, illetőleg az erővonal görbületét, lehetővé teszik a nivófelületen az egyenlő nehézségű vonal érintőjének kijelelését és megadják a nehézség változásának gradiensét. Mindezek az adatok értékes útmutatással szolgálhatnak valószinű tömegeloszlásokra vonatkozólag, melyek a nehézség e változásait okozhatják.

Az ilynemű kutatások rendszeres eszközlése mellett szól még az észlelési módszer nagy érzékenysége is, mely oly kicsiny különbségek felismerésére képesít, minők az inga megfigyelői előtt mindeddig rejtve maradtak és az a kétségbevonhatatlan haszon, melyet egy új módszer alkalmazása az által nyújt, hogy a réginek adatait ellenőrizni, esetleg tévedéseit felderiteni képes.

A mit itt a nehézségre vonatkozólag mondottam, azt kiterjeszthetem a másik talán még rejtélyesebb földi erőre, a földi mágnességre is. Az idézett értekezés magában foglalja azon módszerek leirását is, melyek ugyancsak a torsióinga segélyével a mágneses erőösszetevők differentiálhányadosainak meghatározására szolgálnak.

Legyen azért megengedve nekem, e tudós gyülekezet előtt kifejteni álláspontomat s pontosan megállapitván a feladatot, ismertetni az annak megoldására szolgáló módszereket azokkal az eredményekkel együtt, melyeket velük eddig elérhettem. Referatumom végén jövő teendőkről, tervekről is fogok szólni, melyeknek megvalósitásában csak tudós társaim támogatásától várhatok segitséget.

A megoldandó feladat pontosabb megállapítása.

Valamely erőnek változását egy pont körül, három derékszögű összetevőjének X, Y, Z-nek az x, y, z derékszögű összrendezők szerint képezett első differentiálhányadosai által fejezhetjük ki. Ez a kilencz differentiálhányados a változások módját teljesen előállitja akkor, ha oly kicsiny terekben maradunk, melyekben az erőt a térbeli összrendezők lineáris függvényének szabad tekintenünk.

A nehézségerő esetében mint általában mindig akkor, ha az erőnek potentiálfüggvénye van, e kilencz differentiálhányados értékei között négy összefüggés áll fenn, ezek:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x},$$

és

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=2\omega^2,$$

a hol U a nehézségnek, mint a földi tömegek vonzása és a középpontfutó erő eredőjének potentiálfüggvényét, ω pedig a föld forgásának szögsebességét jeleli.

Ez egyenletek felhasználásával a feladat megoldására, azaz a változás módjának teljes megismerésére a kilencz helyett csak öt egymástól független adat meghatározása szükséges. Mielőtt arról szólanék, hogy mérések útján ez miként eszközölhető, előbb azon geometriai és physikai jelentőségű mennyiségeket akarom itt egybeállitani, melyek a differentiálhányadosok segítségével meghatározhatók. Oly derékszögű összrendezői tengelyrendszert választok, melynek XY síkja a nivófelületet kezdetpontjában érinti, s melynek Z tengelye lefelé van irányitva, úgy hogy az erőösszetevők a kezdetpontban $X=0$, $Y=0$ és $Z=g_0$ legyenek. A tájékozást megkönnyítheti, ha az X tengelyt észak felé, az Y tengelyt nyugat felé irányitva gondoljuk. Helykimélés és ismétlések kikerülése végett, a felsorolandó mennyiségek mellé «v. th.» jelzéssel már itt odairom azoknak észleleteim helyére Budapestre ($\varphi=47°5$) vonatkozó theoretikus értékeit, a mint a Bessel-féle ellipsoidnak

$$a=637{,}739\ 700 \text{ C.}$$

$$b=635{,}607\ 800 \text{ C.}$$

értékeiből és a HELMERT-féle formulából:

$$g = 978{,}00\,(1 + 0{,}0053100\,\sin^2\varphi)$$

C. G. S. egységekben kiszámitottam.

Egyszerű megfontolások útján a következő az összrendezők kezdetpontjára vonatkozó értékek megállapitásához jutunk. A nivófelület normálmetszetének görbületére az XZ sikban:

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{1}{g_0}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad \text{v. th.} = 1570 \,.\, 10^{-12} \qquad 1)$$

ugyanarra az YZ sikban:

$$\frac{1}{\varrho_y} = -\frac{1}{g_0}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \qquad \text{v. th.} = 1565 \,.\, 10^{-12}. \qquad 2)$$

A két főgörbület összegére:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\frac{1}{g_0}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \qquad \text{v. th.} = 3135 \,.\, 10^{-12}. \qquad 3)$$

A két főgörbület különbségére:

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = -\frac{1}{g_0}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\frac{1}{\cos 2\lambda} \qquad \text{v. th.} = 4{,}799 \,.\, 10^{-12} \quad 4)$$

a hol λ azt a hegyes szögletet jelenti, melyet az 1-el jelzett főgörbületi sík az x tengelylyel képez; e szögletet s vele a főgörbületeknek irányát adja:

$$\operatorname{tg} 2\lambda = \frac{2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}}{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}} \qquad \text{v. th.} = 0. \qquad 5)$$

A nehézség erővonalának görbületi sugarára kapjuk

$$R = \frac{g_0}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)^2}} \qquad \text{v. th.} = 120598 \,.\, 10^6 \qquad 6)$$

és ezen a kezdetpontban a nivófelületre merőleges erővonal osculáló síkjának az XZ síkkal képezett szögletére:

$$\cos \alpha = \frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)^2}} \quad \text{v. th.} = 0. \qquad 7)$$

Továbbá a nehézség változásának mértékéül szolgálnak az x irányban

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \quad \text{v. th.} = 8133 \, . \, 10^{-12}, \qquad 8)$$

az y irányban

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \quad \text{v. th.} = 0 \qquad 9)$$

és

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = g_0\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + 2\omega^2 \quad \text{v. th.} = 3086 \, . \, 10^{-9}. \qquad 10)$$

Magára a nivófelületen az összes változást e szerint

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \quad \text{v. th.} = 8133 \, . \, 10^{-12} \qquad 11)$$

fejezi ki, annak irányát tehát vele együtt az állandó nehézség görbéjének reá merőleges érintőjét az összrendezők kezdetpontjában a 7) egyenlet adja.

A 6) és 7) egyenletek kifejezik egyszersmind a függőn irányváltozását a magassággal. Ha ε-nal jeleljük a szögletet, melyet a nehézség iránya egy z-vel a kezdetpont alatt fekvő pontban, a z tengelylyel képez, úgy az irány változásának mértéke:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{1}{R} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial s}}{g_0} \quad \text{v. th.} = 8292 \, . \, 10^{-15},$$

mely utóbbi érték másodperczre átszámítva, a mi theoretikus példánk esetében azt mondja, hogy a nehézség irányváltozása egy czentiméter magasságban 1710 . 10^{-9} másodperczet, 5842 méter magasságban 1 másodperczet tesz ki.

A potentiál második differentiálhányadosainak meghatározása azonban nem csupán magának a nehézségerőnek teljesebb megismerése szempontjából fontos, hanem sok irányban útmutatással szolgálhat az mindazon spekulátiók körében is, melyekkel a tudomány az erő változásainak okait kikutatni törekszik. Szigorú analysis helyett valóban csak spekulátióról lehet itt szó, a mennyiben egymagában az erő ismeretéből a föld felületén és annak közelében nem vonhatunk még szigorú következtetést a föld tömegének egy egyetlen olyan eloszlási módjára, a melynek az erő minden változásával együtt következménye volna. De a synthesis útján járva megállapíthatunk olyan tömegeloszlási módokat, melyek a föld felületén nyilvánuló hatásokat létrehozhatják, s azok egybevetve a föld alkotára vonatkozó ismereteinkkel, a csillagászat és a geologia útmutatásaival valószinűségben sokat nyerhetnek, egyes esetekben talán bizonyosakká is válhatnak. Földalatti sűrűbb rétegeknek, vagy üregeknek feltételezése már eddig is sok esetben szolgált a nehézség változásainak magyarázatára. Az áttekintés megkönnyitése végett fordítsuk figyelmünket a potentiálnak csak azon V részére, mely a normalis viszonyoktól eltérést okozó tömegekből ered s igy a középpontfutó erőt sem tartalmazza. A vonzó tömegek elemét dm-el, ennek összrendezőit ξ, η, ζ-val, a gravitatió állandóját f-el jelelve és téve $r^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$, lesz:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=3f\int\frac{\eta^2-\zeta^2}{r^5}\,dm,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=f\int\frac{\xi^2+\eta^2-2\zeta^2}{r^5}\,dm,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}=-3f\int\frac{\xi\zeta}{r^5}\,dm,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}=-3f\int\frac{\eta\zeta}{r^5}\,dm.$$

Egy pillantás e kifejezésekre meggyőzhet arról, hogy a bal oldalon álló mennyiségek nemcsak zavaró tömegek jelenlétéről tesznek tanúságot, hanem arra nézve is felvilágositást adnak, hogy azok inkább az x vagy az y tengely irányában és csak az egy oldalon vagy mindkét oldalon, vagy túlnyomóan a mélységben feküsznek-e. Ha egy sikságot képzelünk magunknak, melynek újabbkorú kisebb sűrűségű képződményei alatt régibb, nagyobb sűrűségű kőzetek hegyeket, völgyeket képezve vonulnak el, úgy ezek a mennyiségek a síkság néhány pontján meghatározva felvilágosítást adhatnak arról, hegyek, völgyek vagy azoknak lejtői felett állunk-e.

Egy jelentés szűk keretén túllépne e feladat megoldásának további részletezése.

A megfigyelések módszerei.

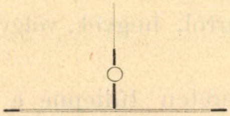
Mindazok a mennyiségek, melyeket az előbbi jegyzetben összefoglaltam, a potentiál második differentiálhányadosai úgy mint az azok által meghatározott 1)-től 11)-ig felsorolt mennyiségek egy helyen eszközölt mérésekkel meghatározhatók. Azokból egyet, a nehézség változását a magassággal s ezzel kapcsolatban a nivófelület középgörbületét Jolly * Münchenben a mérleg segélyével határozta meg. Thiesen Breteuilban, Scheel és Diesselhorst Charlottenburgban nagy gonddal végzett méréseikkel kimutatták e biztos, de csak nagy pontosságú apparatussal és a megfigyelés legmagasabb fokú finomságával czélhoz vezető módszer hasznavehetőségét. Mind a többi itt szóban forgó mennyiségek lemérésére aránylag könnyű szerrel a torsió-inga szolgálhat, abban az alakjában és azokkal a módszerekkel, melyeket szerző fent említett értekezésében 1896-ban tett közzé.

E módszerek alapgondolata a következő: Egy torsio-inga különböző részeinek nehézségei a változó erőtérben nem lévén egyirányúak a tömegközéppont nehézségének irányával, mely körül a forgás történik, forgásmomentumot eredményeznek s az inga fonalát megcsavarják. Ez a forgásmomentum:

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\int xy\,dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\int (x^2 - y^2)\,dm + $$
$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\int xz\,dm - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\int yz\,dm.$$

* Jolly, Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation. Abhandl. d. Bair. Akad. d. Wiss. II. Cl. XIII. Bd. u. XIV. Bd. 1878 és 1881.

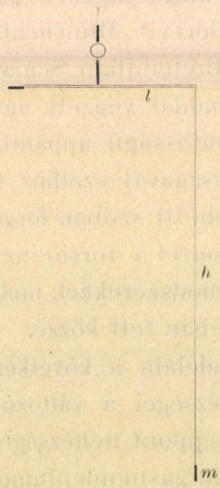
Az e kifejezésben előforduló az inga összes tömegeire kiterjesztendő integrálokat mind egy az ingához kötött tengelyrendszerre kell vonatkoztatnunk. Az inga alakjának alkalmas válasz-



1. ábra.

tása mellett ekként e forgásmomentumot jól észlelhető adatok által fejezhetjük ki.

Vizsgálataimra az ingának két fő alakja szolgál. Az első egy egyenes vízszintes rúd, a hatás növelése céljából végei felé túlnyomó tömegeloszlással, a második egy épen ilyen rúd csak azzal



2. ábra.

a különbséggel, hogy az egyik végét terhelő tömeg mélyebben van elhelyezve, illetőleg ott kellő hosszaságú fonálon függ. Mindkét esetben arra törekedtem, hogy az inga tömegeinek a rúd tengelyére merőleges méretei kicsinyek legyenek, úgy hogy ha összrendező rendszerünk ξ tengelyét a rúd tengelyébe fektetjük,

η tengelyét erre merőlegesen és vízszintesen, ζ tengelyét pedig a nehézség irányában lefelé helyezzük, az inga összes tömegelemeire nézve η kicsiny s így közelitésben elhanyagolható legyen. Tekintettel e jelentés szűk keretére s az η összrendezőknek amúgy is igen kicsiny befolyására, azokat itt figyelmen kívül hagyom.

Ekként ha az inga tehetetlenségi momentumát K-val, az inga rúdja és az x tengely által bezárt szögletet pedig a-val jeleljük, kapjuk az első alakú ingára:

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) K \frac{\sin 2a}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} K \cos 2a. \qquad 12)$$

A második alakra nézve pedig, ha még a függő súly tömegét m-el, ennek forgási karját l-el, tömegközéppontjának a rúd tengelyétől mért függélyes távolát pedig h-val jeleljük:

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) K \frac{\sin 2a}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} K \cos 2a + \\ + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} mhl \cos a - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} mhl \sin a. \qquad 13)$$

Lássuk már most e szerkezetek mechanikáját, s az eljárást, melyet reá czélunk elérése szempontjából alapíthatunk. Előbb az ingák első fajával, tehát egyenes rudak esetével foglalkozunk. Az inga drótjának csavarási coefficiensét τ-val, a torsió-szögletet pedig ϑ-val jelelve az egyensúly esetére találjuk:

$$\tau\vartheta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) K \sin 2a + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} K \cos 2a$$

az e helyzet körül végtelen kicsiny amplitudokkal végzett lengések idejére pedig:

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\tau}{K} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) \cos 2a + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \sin 2a.$$

Az amplitudó véges értékei és az ellenállások miatt eszközlendő correctiók tárgyalásába itt nem bocsátkozom. Ezekről felvilágositást ad fent idézett értekezésem. Tegyük

$$\frac{\tau}{K} = \frac{\pi^2}{T_0^2},$$

T_0-al jelelvén az inga lengésidejét abban az esetben, midőn reá a drót torsióerején kívül semmi egyéb erő nem hat. Ezt az értéket a fentiek értelmében mint középértékét határozhatjuk meg az inga azon lengéseiből, melyeket két egymásra merőleges helyzet körül végez. Ezzel lesz:

$$\vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{T_0^2}{\pi^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos 2\alpha, \qquad 14)$$

és

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\pi^2}{T_0^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos 2\alpha + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\sin 2\alpha. \qquad 15)$$

Az eszközök, melyekről alább lesz szó, lehetővé teszik az egész ingának szekrényestől forgatását a függélyes körül s ezzel azt, hogy α szöglet értékét kivánságunk szerint változtathassuk. Két ilyen jelzői által megkülönböztethető állásra nézve a $\vartheta - \vartheta'$ vagy a $\frac{\pi^2}{T^2} - \frac{\pi^2}{T'^2}$ a 14) és 15) alapján olyan egyenletek által fejezhetők ki, melyek a két keresett értéknek $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ meghatározására szolgálhatnak. Az észlelő választásától függ, erre a csavarodások különbségeit, vagy a lengési idők változásait használja-e föl.

Lássunk egy példát. Legyen $\alpha_1 = 0$ és $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, akkor:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = 2\frac{T_0^2}{\pi^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\pi^2}{T_1^2} - \frac{\pi^2}{T_2^2} = -2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$$

ha pedig $\alpha_3 = \frac{\pi}{4}$ és $\alpha_4 = 3\frac{\pi}{4}$ akkor:

$$\vartheta_3 - \vartheta_4 = \frac{T_0^2}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{T_3^2} - \frac{\pi^2}{T_4^2} = 4\frac{\pi^2}{T_0^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Egyszerű megfontolásokkal győződhetünk meg arról, hogy a csavarodások azon állásukban a legnagyobbak, melyek a főgörbületek irányával 45 foknyi szögletet képeznek, a lengési idők változásában nyilvánuló hatás pedig akkor a legnagyobb, ha a rúd maguknak e főgörbületeknek sikjai körül leng. Okoskodásaink eredményei meglepő egyszerűséget mutatnak, a mi az azokra alapitott módszernek kétségtelenül előnyére válik. Az észlelőnek nem kell itt törődnie eszközének méreteivel, nem kell bajlódnia arra vonatkozó fáradságos hossz- és tömegmérésekkel, mint az inga és a mágnestű használatánál, hogy eredményhez jusson, csak órára és szögmérő eszközökre van szüksége, melyekkel rúdjának lengési idejét és állását meghatározni tudja.

Szigorúan ez csak az egyenes és lineáris rúd képzelt esetében áll, de a transversalis méretekre vonatkozó correctiók mindig igen kicsinyek, a használt eszközöknél többnyire az eredményeknek csak ezeredrészeit befolyásolják. (L. értekezésemet.)

Az egyszerűség és azzal együtt járó biztosság, melyet e módszer nyújt, szerzőt arra inditották, hogy azt alkalmasan módositván magának a gravitatió állandójának meghatározására is felhasználja. (L. f. i. értekezést.)

Térjünk most át torsió ingáink második fajának tárgyalására, arra, melynél a rúd egyik végén a terhelő súly alúlra van függesztve. Megtartva az előbb használt jelzések jelentőségét, ez esetben a csavarodás szögletét az inga egyensúlyi helyzetében a 13) egyenlet alapján a következőnek találjuk:

$$\vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{T_0^2}{\pi^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\sin 2\alpha +$$
$$+ \frac{mhl}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\cos\alpha - \frac{mhl}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\sin\alpha. \qquad 16)$$

Mellőzöm itt a lengési idő megállapitására vonatkozó kifejezést, mint a mely a létesitendő mérések szempontjából nem annyira érdekel. Egyszerűen következik a fenti egyenletből a méréseknél követendő eljárás. A drót megcsavarodása $\vartheta - \vartheta'$ a rúdnak bármely két α és α' irányú állása között egy-egy egyenletet ad, mely a keresett mennyiségek meghatározására szolgál. A rúd állásának megfigyelése öt, a kör kerületén elosztott helyzetben négy ilyen egyenletet ad. Ha teszük

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{T_0^2}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) &= A,\\
\frac{T_0^2}{\pi^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} &= B,\\
\frac{mhl}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z} &= b,\\
-\frac{mhl}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} &= a,
\end{aligned}
\qquad 17)
$$

akkor kapjuk

$$
\begin{aligned}
\vartheta_2-\vartheta_1 = A(\sin 2\alpha_2-\sin 2\alpha_1) + B(\cos 2\alpha_2-\cos 2\alpha_1) +\\
+ a(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1) + b(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1),
\end{aligned}
$$

s a megfelelő jelzőkkel még három ilyen egyenletet.

A $\vartheta_2-\vartheta_1$ etc. csavarodásoknak és az α_1, α_2 etc. szögleteknek lemérése az észlelő feladata. Az így meghatározott négy egyenlet megadja az A, B, a, b mennyiségek értékeit. Az észlelőnek még egy tennivalója van, meg kell állapitania a $\frac{T_0^2}{\pi^2}$ és az $\frac{mhl}{\tau}$ szorzóknak értékeit. Az elsőt a lengési idő megfigyelése, a másodikat azon csavarodás lemérése adja, melyet a logó m tömegre ismert tömegek által gyakorolt vonzás létesít. Ha például az m tömegre M tömegü golyó r középponti távolságban a rúd karjára merőlegesen hat, így a létesitett csavarodás

$$
\delta = f\frac{M}{r^2}\frac{ml}{\tau},
$$

miből $\frac{ml}{\tau}$ értéke kiszámítható; a h hosszaságot mérőrúddal mérjük.

Így aztán teljesen megoldottuk a feladatot. A torsió-mérlegen lemérjük a

$$
\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right),\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z},\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}
$$

értékeit s ezzel egyszersmind ismerjük a 4), 5), 6), 7), 8), 9) és 11) alatt felsorolt mennyiségeket, a mérleg Jolly-féle eljárás útján megadja még a $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ értékét s ezt hozzá véve, ismerjük már most azt az öt független adatot, melylyel a potentiál sajátságából folyó egyenletek alapján még a többi négyet, összevéve tehát mind a kilencz differentiálhányadost meghatározhatjuk. Ha még hozzáveszszük az ingát s a felvilágositást, melyet az nekünk ad, úgy a nehézséget egy pontban és a pont körül kimeritően ismerni fogjuk.

Mérőeszközök.

Az eszközök, melyek az itt körvonalozott mérések kivitelére szolgálnak, elvben igen egyszerűek. Torsió-ingák vagy egyenes rudak, vagy egyik végükön felfüggesztett súlylyal terhelt rudak alakjában, melyek szekrényükkel együtt függélyes tengely körül forgathatók. A szekrény irányának megállapitására vízszintes körosztályzat szolgál, a szekrényben a rúd irányának megfigyelésére pedig két tükör, melyek közül az egyik a rúdon, a másik a szekrényen van megerősitve. E két tükör segélyével a $\vartheta - \vartheta'$ csavarodási szögletet mérjük le, az α szögletek meghatározására pedig ezen kivül még a körosztályzatot is használjuk.

Magából értetődik, hogy a nagy igények mellett, melyeket ily eszközöknek ki kell elégiteniök, azoknak pontos kivitelére a kellő gond forditandó, s különös megfontolás és elővigyázat kell arra, hogy az eszközöket kellő mértékben érzékenyekké, s érzékenységük daczára biztosan használhatókká tegyük.

Az érzékenység fokáról, melyet elérni akarunk, a lemérendő mennyiségeknek példaképen előbb felsorolt theoretikus értékei nyújtanak felvilágositást. A torsió-inga mechanikáját kifejező 14), 15) és 16) alatti egyenletek azonban megadják az útbaigazitást arra, miként érhető az el. Nagy lengési idejű eszközökre van szükségünk. Az általam használt eszközök lengési ideje 600—1200 másodperczny volt, theoretikus példáinkban azokra nézve képleteinkből már több perczny csavarodási szögleteket és egész másodperczeket kitevő lengési idő változásokat számítunk ki. Csak arról van tehát szó, tudjuk-e ily nagyfokú érzékenysége mellett kellő mértékben biztositani mérlegünk állását és járását az ily eszközöket többnyire zavaró befolyásoktól. Ez is lehetséges. Az arra szolgáló biztosíték kettősfalu fémszekrények használatában áll, melyek a megvédendő ingát a nélkül, hogy mozgásában akadályozzák, lehetőleg szorosan veszik körül. E czélra majd csövekből összerakott, majd hosszúkás lapos parallelepipedalakú, majd lapos körhengeralakú szekrényeket alkalmaztam.

A szekrényeknek egymástól $^1/_2$—1 centiméterre elálló kettősfalai 2—4 milliméter vastag sárgaréz lemezekből készültek, épen ilyen vastagságúak a kettőscsövek falai is, melyek a felfüggesztő drótokat veszik körül. Ilyen módon a hőmérséklet változásai a külső térben, lehetőleg egyenletesen hatolnak az eszköz belsejébe, s azt a levegő áramlásának zavaró hatásaitól mentté teszik. A minden oldalról homogén fémburkolat egyszersmind elektromos hatások és sugárzások ellenében is védelmet nyújt. Ily módon valóban meglepő stabilitást értem el, s vizsgálódásaim menetében eszközeimet, melyeket előbb csak sötét és jól temperált pinczékben mertem elhelyezni, később már a világos szobába, azután pedig a szabadba is kivittem, hol azok borús napokon vagy éjjel egyszerű vászonsátor alatt is jól megbizható eredményeket szolgáltattak.

Az ingák felfüggesztésére rendesen platindrótot használtam, melyet előbb már hónapokon, sőt éveken át megterhelve kinyújtottam. Jó szolgálatot tett egy drót, melynek átmérője $^1/_{25}$ mm., hordképessége 120—130 gr. s egy méter hosszú részére nézve kb. $\tau = 0{,}3$ volt. Az ilyen előzetesen hosszú időn át megterhelt vékony drótot egyensúlyi helyzetének biztossága teljesen kielégitő, úgy hogy erre a czélra, különösen hordozásra szánt eszközökben ezeknek adtam az előnyt a kényesebb és törékenyebb Boys-féle quarzfonalakkal szemben.

A méreteket illetőleg szolgáljon példa gyanánt egy bár nem legnagyobb érzékenységű, inkább utazásnál használatra berendezett eszköz, melyet előadó a jelen kiállitásnak magyar osztályában állitott fel.

Ebben az eszközben a sárgarézcsőből készitett rúd hossza 40 centiméter, egyik végén a cső belsejébe tolt, másik végén felfüggesztett platinhengerekkel terhelve. Az elsőnek súlya 30 gr., a másodiké 25,5 gramm. A rudat tartó platindrótnak hossza 60 centiméter, a lógó súly középpontja 55 centiméterrel a rúd alatt fekszik. A rúd lengési ideje $T=761$ s. E méreteknek megfelelőleg az eszköz állandói

$$\frac{T^2}{\pi^2} = 58675$$

és

$$\frac{mlh}{\tau} = 80143$$

s így ez eszköz képleteink szerint theoretikus példánk esetében a főgörbületek különbségét 0,9 percznyi csavarodással, a nehézség változásait a nivófelületben pedig 4,4 percznyi csavarodással jelezné.

Mint már emlitettem, itt csak kisebb érzékenységű eszközzel van dolgunk. Az érzékenység fokozása úgyszólván tetszésünktől függ, különösen azon compensáló eljárás alkalmazásával, melyet idézett értekezésemben leirtam.

Úgy hiszem sikerült kimutatnom a leirt módszerek kivihetőségét. Hozzátehetem, hogy azok könnyen kezelhető eszközökkel és kis fáradsággal vezetnek eredményhez. Sajnálatos, hogy a Jolly-féle mérlegelési módszerről ezt nem mondhatjuk s vele a nehézség változását lefelé csak aránytalanúl nagyobb nehézségek legyőzésével határozhatjuk meg. Kivánatos volna s talán sikerülni fog ennek az adatnak meghatározása is a leirtakkal lényegében megegyező módszerekkel, csakhogy a vizszintes síkban lengő torsiómérleg helyett a függélyes síkban lengő inga felhasználásával. A nehézség változásai az inga járását és állását is befolyásolják. Ez a befolyás, melynek nagysága a fentiekhez hasonló okoskodással megállapitható, a másodperczinga járását (vonatkoztatva a nehézség értékére a forgási tengelyben) ugyancsak mintegy egy négymilliomod ($23 . 10^{-8}$) másodperczczel kisebbíti, de 10 másodperczes ingánál a lengési időben már egy négyezered másodperczet, 100 másodperczczes ingánál pedig már egy negyed másodperczczes kisebbedést okoz. Ez a hatás a vízszintes rudak esetében, minők a mérlegrudak, ellentett irányú lesz. Súlypontjuk közelében fekvő tengelyek körül forgó rudakkal ez is megvalósítható volna; csakhogy a forgási tengely állandóságának biztosítása nagy nehézségekbe ütközik. Talán azon az úton haladva, melyen Defforges ingáinak tökéletesítéséhez jutott s az ingákat Lippmann útmutatása szerint hosszabb időn át lengésben tartva és megfigyelve, lehetséges lesz a kijelelt czélt elérni.

Megfigyelések eredményei.

Terjedelmes, a földfelület egy nagyobb részét rendszeresen felölelő megfigyelésekre még nem hivatkozhatom. Az egyes erejét túllépő feladat ez. Itt csak olyan kisebb területeken végzett mérésekről fogok szólni, melyeket néhány hű munkatársam segítségével magam végezhettem. A megfigyelések helyei akként vannak választva, hogy azok felvilágosítást nyújthassanak úgy a síkságon, mint hegyek alján és ezek tetején, valamint épületek belsejében fellépő viszonyokról.

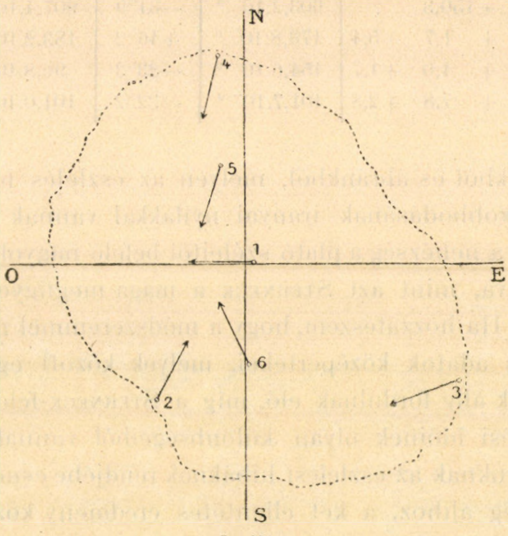
Kezdem a Sághegy platóján végzett megfigyelésekkel.

Ez a Magyarország nyugoti részében Kis-Czell közelében a síkságból kiemelkedő vulkánikus eredetű hegy a nehézség viszonyai iránt érdeklődők figyelmét különösen azon részletes megfigyelések folytán vonta magára, melyeket azon és a körül 1884-ben R. Sterneck végzett. (Mittheilungen des k. k. Militärgeographischen Instituts. Bd. V.)

A majdnem szabályos csonka kúpalakú hegy körülbelül 1600 méter átmérőjű basisból 150 méter magasságra emelkedik s ott egy mintegy 200 méter átmérőjű közel köralakú sík platóban végződik. Tömegét vulkanikus kőzetek, basaltok és tuffák alkotják.

Sterneck e hegyen az ingával végzett megfigyeléseiből a többi között azon meglepő következtetéshez jutott, hogy a nehézség a plató szélén (ábránkban 2 pontban) mintegy $\frac{1}{30000}$ részével nagyobb, mint annak közepén (ábránkban 1 pont). Olyan úgy irányát mint nagyságát tekintve feltünő változás ez, melyet a nehézségre vonatkozó mai elméletünk aligha tudna igazolni. Legalább az a körülmény, hogy a hegy szélén 2,9 sűrűségű basaltok törnek napvilágra, a plató közepén pedig 2,3 sűrűségü tuffákat találunk, nem elegendő a magyarázatra.

Tangl K., Kövesligethy R. urak, kiket Bodola L. tanár úr, mint geodeta támogatni sziveskedett, 1891 nyarán eszközeimmel



3. ábra.

és utasításom szerint ugyancsak megvizsgálták a nehézségi viszonyokat a Sághegy platóján. Észleléseiket a Sterneck által vizsgált helyeken kívül még két pontra, a plató szélének közelében (az ábrában 3 és 4) és ugyancsak két pontra a plató belsejében (5 és 6) terjesztették ki.

Az észlelések eredményeit a következő tábla foglalja össze. Abban x, y, z az észlelés helyének összrendezőit jelzi méterekben északi, keleti irányban és lefelé mérve. Az összrendezők kezdetpontjául a Sterneck által épített téglapillér közepe szolgál.

A $g_0\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)$ és $\frac{\partial g}{\partial s}$ alatt e mennyiségek absolut értékeit értem, a μ szöglet a g nagyobbodásának irányát, a λ szöglet pedig a kisebb görbület (nagyobb görbületi sugár) irányát jeleli e szögleteket északtól keleten át mérve le.

	x	y	z	$g_0\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)$	λ	$\frac{\partial g}{\partial s}$	μ
1	+ 0,1	+ 8,8	+0,7	$212{,}9.10^{-9}$	—38°2	$88{,}2.10^{-9}$	— 90°2
2	—104,4	— 37,8	+6,8	$167{,}7.10^{-9}$	—74°2	$668{,}7.10^{-9}$	+ 28°1
3	— 90,9	+150,3	?	$603{,}2.10^{-9}$	—34°9	$907{,}4.10^{-9}$	—100°5
4	+100,0	+ 1,7	+5,4	$173{,}8.10^{-9}$	+46°2	$183{,}2.10^{-9}$	—165°4
5	+ 53,9	+ 1,0	+1,7	$154{,}6.10^{-9}$	—23°3	$96{,}8.10^{-9}$	—153°9
6	— 66,3	+ 7,8	+2,8	$401{,}7.10^{-9}$	—32°2	$101{,}0.10^{-9}$	— 10°4

Ez adatokból és ábránkból, melyen az észlelés helyein a nehézség nagyobbodásának irányai nyilakkal vannak jelelve, kitünik, hogy a nehézség a plató széleitől befelé nagyobbodik, nem pedig fordítva, mint azt Sterneck a maga megfigyeléseiből következtette. Ha hozzáteszem, hogy a módszeremmel nyert adatok olyan egyes adatok középértékei, melyek között egy százaléknyi eltérések alig fordulnak elő, míg a Sterneck-féle adatok az ingák lengési időinek olyan különbségeiből vannak levezetve, melyek maguknak az észlelési hibáknak rendjébe esnek, úgy nem férhet kétség ahhoz, a két ellentétes eredmény közül melyik a helyes. Olyan esettel állunk itt szemben, melyben az inga felmondja már a szolgálatot s kell, hogy a kérdés eldöntését finomabb testvérére, a torsió-mérlegre bizza. Különben is érdekes kis terület az a sághegyi plató. Így például az annak meredek szélétől csak 3—4 méter távolságra eső, ábránkon 3-mal jelzett helyen a nehézség változása vizszintes irányban olyan nagy, hogy a mérleg is megérezné.

Ha egy mérleget, melynek rúdja $^1/_2$ méter hosszú és a mely két oldalán egy-egy kilogrammnyi súlyokkal van megterhelve, 180 fokkal a vertikalis tengely körül forgatnánk, az itt akkora kitérést mutatna, mekkora $^1/_{10}$ milligramm túlsúlynak felel meg.

Ugyanazon a helyen a mérésekre használt torsió-inga lengési idejében, mely normális viszonyok között 890 sec. volt, 43 sec. különbség állott elő a szerint, a mint az a nagyobb vagy kisebb görbület síkja körül lengett. Egy torsiótól teljesen ment vízszintes rúd lengésideje e helyen 4044 sec. volna.

Az elméletből előreláthatólag az erőváltozások ilyen nagy hatásaival találkozunk hegyek tövénél is, mint azt a Budapest területén fekvő Szt. Gellérthegy alján is konstatálhattam.

Sokkal kisebbekek, de úgy hiszem sokkal érdekesebbek azok a változások, melyeket sík területeken találunk. Ezek a szemeink előtt rejtett földalatti tömegeknek, álláspontunk alatt elvonuló nagyobb sűrűségi lejtőknek, hegyeknek és völgyeknek megnyilatkozásai.

Budapesttől délkeleti irányban 7—8 kilométernyire fekvő szt.-lőrinczi kertemben volt alkalmam ilyen hatásokat megfigyelni. A nehézség változása itt, bár sík területen állunk, a normális változásnak mégis mintegy hatszorosát teszi ki és irányában is attól eltérést mutat. Milyen érdekes feladat volna, támogatva geodetikai mérésektől egy nagyobb területnek, például a nagy magyar Alföldnek ily irányban rendszeres átkutatása Vagy még ennél is érdekesebb lehetne sarki expeditiók alkalmával a «*Fram*» módjára befagyott hajók közelében felállított torsió-ingák megfigyelése, melyek lassú utazásuk közben jeleznék a tenger alatti hegyeket és völgyeket, melyek felett elvonulnak.

Lássuk most, hogy állanak a dolgok egy épület belsejében, a laboratoriumban. A megfigyelés ott különösen kedvező viszonyok között eszközölhető, s helyről-helyre változó értékeket szolgáltat. Az épület falai s még nagyobb mértékben a pinczék üregei nyilvánítják befolyásukat. A budapesti egyetem physikai intézetében, a hol ilynemü méréseket eszközöltem a $\frac{\partial g}{\partial s}$ hányadosra vonatkozólag $50 . 10^{-9}$ és $130 . 10^{-9}$ között fekvő értékeket találtam. Az első kérdés, mely itt előáll, az: nem befolyásolják-e az aránylag nagy értékek laboratoriumi munkálatainkat, különösen a mérleg pontos használatánál. Egyes esetekben valóban előfordulhat ez, a mennyiben a fenti értékek arról tanúskodnak, hogy egy a Ság-hegyre vonatkozólag leírthoz hasonló mérlegnek átforgatása 5—13 ezred milligrammnak megfelelő kitéréseket adhatna. Különben a GAUSS-féle mérlegelési eljárás független az ilyen befolyásoktól.

Egy második kérdés az, lehet-e a laboratoriumban az épület tömegei által annyira befolyásolt értékekből következtetést vonni a nehézség változásának azon részére, a mely az épülettől független, s a melyet mint emberi beavatkozástól nem befolyásoltat az erő természetes változásának akarok nevezni. Ugyanolyan feladattal állunk itt szemben, mint mágneses méréseinknél, melyeknél, mikor az u. n. földi mágneses erőt keressük, a környezet mágneses tömegeitől kell magunkat függetlenekké tennünk. Több, kevesebb a közeli tömegek hatására vonatkozó számitással mindig lehetséges lesz ez, de e számitások nehézségeit legalább a meghatározandó adatok egyikére vonatkozólag az észlelés helyeinek alkalmas megválasztásával ki is kerülhetjük. Kimutathatjuk ugyanis, hogy a $\frac{\partial g}{\partial s}$ értékére egy olyan s irányban, mely az épületnek egy függélyes symmetria sikjára merőleges, az épület tömegei nincsenek befolyással. Épületeink legnagyobb részében találhatunk két ilyen egymásra merőleges síkot, mely a követelményeknek annyira, mennyire megfelel. Minden egyes esetben, különös okoskodásokkal és számításokkal kijavithatjuk a symmetria hiányait.

Ezen az úton sikerült is nekem, eléggé szabálytalan intézetem helyén a $\frac{\partial g}{\partial s}$ természetes értékét megállapitani, s a különböző helyiségeiben tényleg talált egymástól nagyon eltérő értékeket erre redukálni. Intézetem az északtól délfelé folyó Duna balpartján e folyótól 1 kilométer távolságban teljesen sik területen áll. A Duna jobbpartján a budai oldalon, tehát intézetemtől nyugoti irányban hegyek emelkednek, a nehézség nagyobbodása mégis ezeknek irányában észlelhető és pedig $\frac{\partial g}{\partial s} = 53 \,.\, 10^{-9}$ értéket ér el, arról tanúskodván, hogy a hegyek lejtőinek folytatása messze a földszine alá nyúlik. Geologiai megfontolások ugyanazon következtetésre jogositanak.

Egy érdekes kérdés, melyben az itt leirt módszerek érdekes felvilágositást nyújthatnak, a nivófelületek időbeli változásainak kérdése. Erre nyugvó, szilárdan felállitott eszközöket használhatunk, melyeknek érzékenységét már emlitett compensatorommal tetszés szerint fokozhatjuk. Ennek daczára aligha számithatunk arra, hogy oly módon lehetségessé váljon azon felette kicsiny változásoknak megfigyelése, melyeket földünk forgása következtében a nap és a hold vonzó erejükkel közvetetlenül okoznak. Legalább egy város nyugtalan területén felállitott eszközök erre bizonyára nem alkalmasak. De azok a változások, melyek akár kosmikus, akár földi erők folytán magának a föld tömegének eloszlásában előállanak, igen sok esetben jól megfigyelhetők. A tengerek vizének dagálya és apálya, a folyók és tavak szintjének ingadozásai, földalatti vizmedenczék megtelése és kiürülése, a földtalajban visszatartott viz mennyiségének változásai, a földrengések folytán beállott tömegeltolódások, a continentális emelkedések és sülyedések mind olyan változásokat okoznak, melyek a megfigyelés körébe vonhatók. Például a Duna emelkedését és sülyedését partjától 100 méter távolban jól tudtam megfigyelni s megvalósitottam eszközömnek oly fokú érzékenységét, hogy az a tenger partjától 1 méternyire a közép vizszintnek 1 milliméternyi emelkedését egy félpercznyi szögkitéréssel tudja jelezni. Egy milliméternyi eső vize a földtalajában ugyanilyrendű változást okozna. Valóban sok érdekes tennivaló van még e téren.

Kutatásaimnak két olyan eredményéről kell még beszámolnom, a mely a nehézség főtényezőjének, a tömegek vonzó erejének általános jellemzésére szolgál.

Az egyik arra a kérdésre vonatkozik: független-e a vonzó erő a vonzott tömeg anyagi minőségétől? Ismeretes, hogy Bessel ingáival a függetlenséget különböző anyagokra vonatkozólag mintegy egy százezeredig terjedő közelitéssel mutatta ki. Én tovább mehettem.

Gondolatmenetem röviden a következő: Valamely test nehézségét a föld vonzása és a középpontfutó erő eredőjének tekintvén következik, hogy ha a vonzás különnemű anyagokra különböző volna, úgy a nehézség nivófelületeinek különböző anyagokra ugyancsak különbözőknek kellene lenniök. Egy rúd két végén alkalmazott különböző anyagú testek nehézségei ez esetben (eltekintve az æquator és a sarkok kivételes helyeitől) a torsió-ingában csavarodást létesitenének. Ez a csavarodás a rúdnak két kelet-nyugoti állása között a torsió-inga szekrényének 180 fokkal átforgatása közben volna megfigyelhető. Az erre vonatkozó kisérletek eredménye negativ volt s azt mutatta, hogy a kérdéses különbség üveg, sárgaréz, antimonit és parafára nézve semmi esetre sem lehet nagyobb mint a nehézségüknek egy húszmilliomodrésze, a levegőre nézve pedig mint annak egy százezeredrésze. Ez utóbbi eredményt légüres üveggolyók segélyével állapitottam meg. Megjegyzem, hogy e mérések, melyeket módszeremnek úgyszólván születési idejében s így kezdetleges eszközökkel végeztem, nem érték még el érzékenységük tekintetében az elérhető határt, s folytatásuk még kivánatos.

Egy másik már sokszor felvetett kérdés az, módosul-e a vonzó erő nagysága az egymásra ható testek közé helyezett tömegek által? L. W. Austin és C. B. Thwing 1897-ben felfrissitvén e kérdést, olyan megfigyelések eredményeit közölték, melyekkel kimutatják, hogy néhány cm. vastagságú ólom, higany, víz stb. lemezek $1/5$ százalékkal nem módositják a rajtuk át történő vonzást. Ily rendű hatások különben amúgy sem várhatók, mert magának a nehézségnek zavaraiban, sőt csillagászati jelenségekben is kellene nyilvánulniok. E kérdésben a negativ eredménynek jelentőséget csak a sokkal pontosabb igazolás adhat. Ilyent szolgáltat torsió-ingáim második typusának (lógó-súlylyal) megfigyelése napkelte és napnyugta idejében, ha az inga rúdját a napkeltének, illetőleg napnyugtának irányára merőlegesen állitjuk. Ilyenkor ugyanis a lenyugvó nap valamely pontjából az inga felső és alsó súlyához húzott egyenesek különböző hosszaságú részeikben haladnak át a föld testén. A mikor például a felső súlyból a nap egy pontjához húzott egyenes a föld felületét épen még érinti, az alatta egy méterrel mélyebben fekvő pontból ugyanoda húzott egyenesnek már több mint 7 kilométer hosszú darabja esik magába a földbe. Ha a földrétegek, melyeken át a vonzás történik, azt érezhetően módosítanák, úgy e hatásuknak az ingarúd kitérésében kellene nyilvánulnia. Számba vetve a használt eszköz érzékenységét, megállapíthattam így, hogy a földünk felső rétegeit alkotó anyagok egy kilométer vastagságban nem módosítják a napnak rajtuk át történő vonzását még egy százmilliomodrészszel sem. A mit a nap vonzására nézve találtunk, azt bátran kiterjeszthetjük más égi és földi testek vonzására is.

A földi mágnesség változásai.

Az erő változásainak lemérése abban az értelemben, mint azt előbb a nehézségre vonatkozólag kifejtettem, mágneses erőkre nézve is kivihető. A mérésre szolgáló módszereket előbb idézett értekezésemben irtam le, azoknak részleteibe itt nem bocsátkozhatom. Megjegyzem azonban, hogy az ilyen méréseknél az erők kicsinysége miatt eddig nem érhettem el az érzékenységnek olyan fokát, melylyel a normális változásokat úgy, mint azokat mágneses térképeinkből megállapíthatjuk, nemcsak kimutatni, hanem lemérni is tudjam. A tényleg eszközölt mérések azonban azt mutatták, hogy a legtöbb esetben ezeknél sokkal nagyobb változásokkal van dolgunk, melyeknek meghatározására az eljárás érzékenysége több mint kielégítő.

A feladat ez esetben is az erő vagy helyesebben intensitási összetevők X, Y, Z differentiálhányadosainak meghatározása. Ezek közül ebben az esetben a torsió-mérleg segítségével hatot határozhatunk meg, ú. m.:

$$\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial z}.$$

Az a szembetünő előny, hogy itt a $\frac{\partial X}{\partial x}$ és $\frac{\partial Y}{\partial y}$ hányados értékeit egyenkint lemérhetjük, nem pedig csak különbségeiket, mint a nehézség esetében, a mágneses erők azon sajátosságából ered, hogy térbeli változásaik az egész mágnes testére ható translatorikus erőt eredményeznek.

A potentiál feltételezésétől független alakban soroltam fel a differentiálhányadosokat. Azon kételyekre tekintettel tettem ezt, melyek különösen újabb időben merültek fel az iránt, van-e egyáltalában a földi mágneses erőket létesitő összes tényezőknek potentiáljuk. Habár e kérdés nincs ez ideig szigorúan eldöntve, annyit állithatok, hogy az egész erőnek csak egy kicsiny része lehet az, melyre nézve a potentiál létele kérdésessé válik. Maga az itt tárgyalt mérési módszer is szolgáltathat egy adatot a kérdés eldöntéséhez, mert segélyével megállapithatjuk, elég van e téve a potentiál egyik feltételének, a

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

egyenletnek.

Eddig végzett méréseim pontosságának határán belül azt igazolva találtam.

Potentiált tételezve fel, a mi talán csak a közelitésnek egy fokát jelenti, a felsorolt hat differentiálhányados a hiányzó háromnak értékét is megadja, s így az intensitás változásainak kérdése magával a torsió-ingával végzett mérések útján teljes megoldást nyer. A nivófelületek és az erővonalak görbületeinek, vagy az isogon, isoklin, isodynám vonalak irányának és gradienseinek meghatározása az észlelés helyén ezek után csak a számítás dolga.

A módszerek kipróbálása czéljából intézetem belsejében és künn a szabadban emlitett kertem sík területén végeztem méréseket. Erre használt eszközeim érzékenysége akkora volt, hogy az intensitás változását centiméterenkint egy százmilliomod C. G. S.-sel közel egy percznyi kitérésekkel jelezték. Bent az épületben 30—50 foknyi, a translatorikus erő által létesitett kitéréseket, a szabadban körülbelül $^1/_2$ foknyiakat figyeltem meg. E magukban álló, csak egyes helyekre vonatkozó adatokból természetesen nem vonhatunk még le újabb általános érdekű következtetéseket. Különösen az, a mit az épület belsejében találtam, csak constatálása volt a tégláből épült falak azon feltünő hatásának, melyet KOHLRAUSCH localvariométerének segítségével is kimutatni tudott. Milyen érdekes volna azonban valamely rendellenességeiben feltünő területnek, minő például az újabban E. LEYST által a kurski gouvernementben feltaláltnak, rendszeres átkutatása az új módszerekkel. Különösen érdekesnek mutatkozik azonban a mágneses erő időbeli változásainak ilyennemű vizsgálata.

Földünket elektromos áramok fogják körül, s azok a tényezők, melyek az áramok irányát és intensitását megszabják és módosítják, nagy részükben bizonyára localis jellegüek. Ilyenek a mágneses kőzetek hatásai is, úgy hogy a mágneses erő azon változásai mellett, melyek nagyjában a földnek minden helyén közösek, bizonyára fellépnek még olyan localis változások is, melyek eddig megfigyelhetők, vagy legalább jól elkülönithetők nem voltak.

Hónapokon át fotografiai úton registráltam intézetem egy helyiségében az egy mágnesre gyakorolt translatorikus erőnek s ez által a mágneses intensitás térbeli változásának ingadozását. Meggyőződhettem arról, hogy ez ingadozásnak bizonyos szabályokat követő napi járása van, mely eszközömön 10—20 perczny kitérésekben nyilvánult. Ezekből a város közepében tett megfigyelésekből azonban korai, sőt hibás volna a szabad természetben végbemenő folyamatokra következtetni, a mi már abból is kitűnik, hogy diagrammjaim a vasárnapokat és ünnepnapokat is különös jellegű görbékkel jelezték. Azok a mondhatnám technikai áramok, melyek ma a nagy város talaját keresztül-kasul járják, a természetestől nagyon is eltérő viszonyokat létesitenek. Ilyenektől ment zavartalan talajon felállított observatoriumok feladata lehetne, ilyen megfigyelésekkel foglalkozni.

ADALÉK AZ INTERPOLÁCZIÓ ÉS A PARCZIÁLIS TÖRTEK ELMÉLETÉHEZ.

A következőkben expliczit képletben megoldását adom a raczionális egész függvények interpolácziója problémájának, a mely legáltalánosabb alakban így fogalmazható:

Képezzük azt az $f(x)$ *legfeljebb* $k_1 + k_2 + \cdots + k_n - 1$*-edfokú raczionális egész függvényt, a mely a következő* $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ *feltételnek eleget tesz:*

$$\left(\frac{d^j f(x)}{dx^j}\right)_{x=x_r} = u_{rj} \qquad \begin{pmatrix} j=0,1,2,\ldots,k_r-1 \\ r=1,2,3,\ldots,n \end{pmatrix} \tag{1}$$

a hol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *különböző számok és* $\frac{d^0 f(x)}{dx^0} = f(x)$.

Ily általánosan fogalmazza a problemát MARKOFF is *Differenzenrechnung* czím alatt német nyelven megjelent munkájában,* az $f(x)$ függvény együtthatóinak meghatározására azonban csak egy rekurziv képletet állapit meg** s a problémának expliczit képletben való megoldását csak nehány egyszerű specziális esetben adja. Bár a rekurziv képletek is teljes megoldását adják a problémának s a gyakorlati számítás igényeit is teljesen kielégítik, mégis mindig haladást jelent a mathematikában, ha valamely problémát expliczit képlettel oldunk meg, minthogy az expliczit képletből igen gyakran oly további eredmények olvashatók

* Az orosz eredetiből fordították TH. FRIESENDORFF és E. PRÜMM (1896, Teubner); 1-ső lap.

** l. c. 2. lap.

ki, a melyekhez rekursziv képletek segítségével nem juthatunk el; elég megemlítenem példaképen a LAGRANGE-féle interpoláczió képletet, a mely az itt tárgyalt problémának ama speczialis esetét oldja meg, midőn

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1.$$

Különben a levezetendő képleteknek mindjárt egy fontos alkalmazását is bemutatom: ha ugyanis expliczit képletünk van az $f(x)$ számára, ebből, ép úgy a mint LAGRANGE-féle interpoláczió képlettel ama raczionális tört függvények parcziális törtekre bonthatók, a melyek nevezőjének csak egyszeres gyöktényezői vannak, levezethetők az általános raczionális tört függvények parcziális törtekre bontásának képletei, még pedig sokkal részletesebben kiszámított és talán használhatóbb alakban, mint az általánosan ismeretes erre vonatkozó képletek.*

Az $f(x)$ meghatározásánál azt az általános gondolatmenetet követtem, a melyet a LAGRANGE-féle interpoláczió-képlet levezetésénél szokás követni,** ugyanis előbb meggyőződünk arról, hogy problémánknak egy és csak egy megoldása van s ennek alapján, a mint látni fogjuk, a megoldást elő is állítjuk.

Hogy az 1) alatti feltételek az $f(x)$ $k_1+k_2+\cdots+k_n-1$-edfokú függvényt valóban egyértelműen meghatározzák, az következőképen látható be:

Legyen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1}$$

és írjuk ki részletesen az 1) alatti feltételeket:

---

* A levezetendő képleteknek ez alkalmazására RADOS tanár úr figyelmeztetett s ő ajánlotta az $f(x)$ meghatározásánál követendő gondolatmenetet is.

** L. WEBER, Algebra I. kötet I. kiadás, 99. l.

$$\left.\begin{array}{l}
a_0+a_1 x_r + a_2 x_r^2 + \cdots + a_j x_r^j + a_{j+1} x_r^{j+1} + \cdots + a_{N-1} x_r^{N-1} = u_{r0} \\
a_1 + 2a_2 x_r + \cdots + j\, a_j x_r^{j-1} + (j+1)\, a_{j+1} x_r^j + \cdots + (N-1)\, a_{N-2} x_r^{N-2} = u_{r1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ j!\, a_j + j!\binom{j+1}{j} a_{j+1} x_r + \cdots + j!\binom{N-1}{j} a_{N-1} x_r^{N-j-1} = u_{rj} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(k_r-1)!\, a_{k_r-1} + \cdots + (k_r-1)!\binom{N-1}{k_r-1} a_{N-1} x^{N-k_r} = u_{rk_r-1}
\end{array}\right\} 1^*$$

$$(r=1, 2, \ldots, n)$$

Ez egy lineár egyenletrendszer az

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{N-1} \qquad 2)$$

mennyiségekre vonatkozólag, a melynek determinánsa:

$$D=\left|\begin{array}{cccccccc}
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
1 & x_r & x_r^2 \ldots x_r^j & & x_r^{j+1} & x_r^{j+2} \ldots & & x_r^{N-1} \\
0 & 1 & 2x_r \ldots j x_r^{j-1} & & (j+1)\, x_r^j & (j+2)\, x_r^{j+1} \ldots & & (N-1)\, x_r^{N-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 \ldots 0 & j! & & j!\binom{j+1}{j} x_r & j!\binom{j+1}{j} x_r^2 & \ldots & j!\binom{N-1}{j} x_r^{N-1-j} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 & & (k_r-1)! & \ldots & & (k_r-1)!\binom{N-1}{k_r-1} x_r^{N-k_r} \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & &
\end{array}\right|$$

$$(r=1, 2, \ldots, n)$$

A D determináns hasonló módszerekkel, mint a milyeneket legközelebb más determinánsok kiszámításánál be fogok mutatni, kiszámítható; a számítás a Math. és Phys. Lapokban is megjelent:* e számítás alapján:

$$D = \prod_{w=1}^{n} (k_w - 1)!\,(k_w - 2)!\ldots 3!\,2!\prod_{\substack{t>s \\ (t,\,s=1,2,\ldots,n)}} (x_t - x_s)^{k_t k_s} \qquad 3)$$

Ha az x-ek egymástól különböző számok D nem lehet zérus, tehát az 1*) alatti egyenletrendszernek a 2) alatti mennyiségekre vonatkozólag egy és csak egy megoldása lehet, az 1) alatti feltételek tehát egy és csak egy legfeljebb $k_1 + k_2 + \cdots + k_n - 1$-edfokú raczionális egész függvényt határoznak meg.

Miután erről meggyőződtünk, maga $f(x)$ a következő meggondolások alapján állítható elő: csatoljuk az 1*) alatti egyenletrendszerhez a következő egyenletet:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} = f(x)$$

az így bővitett 1*) akkor egy homogén lineár egyenletrendszer lesz a következő mennyiségekre vonatkozólag:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{N-1},\ 1.$$

Erről az egyenletrendszerről tudjuk az előbbiek alapján, hogy mindig megoldható, determinánsa tehát zérussal egyenlő, azaz:

---

* L. BEKE MANÓ VII. kötet 115. l. Az ott használt eljárást legelőször BAUER MIHÁLY alkalmazta a D determinánsnak ama顿 speczialis esetben való kiszámítására, midőn $k_1 = k_2 = \cdots k_n = 2$ (l. Math. Phys. Lapok, II. kötet, 171. lap); e determinánst továbbá MARKOFF is kiszámította idézett művében. (168. l.)

$$\begin{vmatrix}
f(x) & 1 & x & x^2 \dots & x^j & x^{j+1} \dots & x^{N-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
u_{r0} & 1 & x_r & x_r^2 \dots & x_r^j & x_r^{j+1} \dots & x_r^{N-1} \\
u_{r1} & 0 & 1 & 2x_r \dots & j\, x_r^{j-1} & (j+1)\, x_r^j \dots & (N-1)\, x_r^{N-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
u_{rj} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & j! & j! \binom{j+1}{j} x_r \dots & j! \binom{N-1}{j} x_r^{N-j-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
u_{rk_r-1} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots (k_r-1)! & \dots & (k_r-1)! \binom{N-1}{k_r-1} x_r^{N-k_r} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix} = 0 \qquad 4)$$

$$(r=1, 2, \dots, n)$$

Ha a bal oldalon álló determinánst első oszlopának elemei szerint kifejtjük, $f(x)$ számára a következő alakot kapjuk:

$$f(x) = -\sum_{j=0}^{k_r-1} \sum_{r=1}^{n} \frac{A_{rj}}{D} u_{rj} \qquad 5)$$

A_{rj} itt u_{rj} aldeterminánsa a 4) alatti determinánsban; látható, hogy $f(x)$ aldeterminánsa maga D s ezért kerül a nevezőbe az 5) alatti képlet jobb oldalán.

$f(x)$ meghatározásának problémája ez által az A_{rj} aldeterminánsok meghatározására van visszavezetve, a melyek következő szerkezetűek:

$$
A_{rj} = (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+j+1}
\begin{vmatrix}
1 & x & x^2 \ldots x^j & & x^{j+1} & \ldots & & & x^{N-1} \\
1 & x_i & x_i^2 \ldots x_i^{j_i} & & x_i^{j_i+1} & \ldots & & & x_i^{N-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \ldots 0 & j_i! & & j_i!\binom{j_i+1}{j_i} x_i & \ldots & & & j_i\binom{N-1}{j_i} x_i^{N-j_i-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; 0 & & & (k_i-1)! & \ldots & & & (k_i-1)!\binom{N-1}{k_i-1} x_i^{N-k_i} \\
1 & x_r & x_r^2 \ldots x_r^{j-1} & & x_r^j & & x_r^{j+1} & x_r^{j+2} \ldots & x_r^{N-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \ldots 0 & (j-1)! & & (j-1)!\binom{j}{j-1} x_r & & (j-1)!\binom{j+1}{j-1} x_j^2 & (j-1)!\binom{j+2}{j-1} x_r^3 \ldots & (j-1)!\binom{N-1}{j-1} x_r^{N-j} \\
0 & 0 \ldots 0 & 0 & & 0 & & (j+1)! & (j+1)!\binom{j+2}{j+1} x_r \ldots & (j+1)!\binom{N-1}{j+1} x_r^{N-j-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \ldots 0 & 0 & & 0 & & 0 \ldots (k_r-1)! & \ldots & (k_r-1)!\binom{N-1}{k_r-1} x_r^{N-k_r-1} \\
1 & x_l & x_l^2 \ldots x_l^{j_l} & & x_l^{j_l+1} & \ldots & & & x_l^{N-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \ldots 0 & j_l! & & j_l!\binom{j_l+1}{j_l} x_l & \ldots & & & j_l!\binom{N-1}{j_l} x_l^{N-j_l-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \ldots 0 & 0 \;\ldots\; 0 & & (k_l-1)! & \ldots & & & (k_l-1)!\binom{N-1}{k_l-1} x_l^{N-k_l-1}
\end{vmatrix}
$$

$$(i=1, 2, \ldots, r-1; \quad l=r+1, r+2, \ldots, n)$$

A_{rj} részben ugyanoly módszerekkel számítható ki, mint a hogy Beke a D determinánst kiszámította; legyen ugyanis A'_{rj} ama determináns, a melyet A_{rj}-ből úgy kapunk, hogy az x_r-t tartalmazó sorkomplexust a következő sorokkal pótoljuk:

$$\begin{array}{l}
1, \; y_0, \; y_0^2, \; \ldots, y_0^{N-1} \\
1, \; y_1, \; y_1^2, \; \ldots, y_1^{N-1} \\
\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
1, \; y_{j-1}, \; y_{j-1}^2, \ldots, y_{j-1}^{N-1} \\
1, \; y_{j+1}, \; y_{j+1}^2, \ldots, y_{j+1}^{N-1} \\
\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
1, \; y_m, \; y_m^2, \; \ldots, y_m^{N-1}
\end{array}$$

a hol $m = k_r - 1$ és az y-ok új határozatlanok.

Ezzel az A'_{rj} determinánssal az A_{rj} a következő összefüggésben van:

$$(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+j+1} A_{rj} =$$

$$= \left(\frac{d^{1+2+\cdots+j-1+j+1+j+2+\cdots+k_r-1}}{dy_1 \, dy_2^2 \ldots dy_{j-1}^{j-1} \, dy_{j+1}^{j+1} \, dy_{j+2}^{j+2} \ldots dy_m^m} A'_{rj} \right)_{y_0=y_1=\cdots=y_{j-1}=y_{j+1}=\cdots=y_m=x_r} \qquad 6)$$

A'_{rj} pedig ugyanúgy számítható ki mint D.

Legyen:

$$
B_{rj} = \begin{vmatrix}
1 & x & x^2 & \dots & x^{N-1} \\
 & & \dots\dots\dots & & \\
1 & x_i & x_i^2 & \dots & x_i^{N-1} \\
1 & (x_i+h) & (x_i+h)^2 & \dots & (x_i+h)^{N-1} \\
1 & (x_i+2h) & (x_i+2h)^2 & \dots & (x_i+2h)^{N-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & (x_i+j_ih) & (x_i+j_ih)^2 & \dots & (x_i+j_ih)^{N-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & x_i+(k_i-1)h & (x_i+(k_i-1)h)^2 & \dots & (x_i+(k_i-1)h)^{N-1} \\
 & & \dots\dots\dots & & \\
1 & y_0 & y_0^2 & \dots & y_0^{N-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & y_{j-1} & y_{j-1}^2 & \dots & y_{j-1}^{N-1} \\
1 & y_{j+1} & y_{j+1}^2 & \dots & y_{j+1}^{N-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & y_{k_r-1} & y_{k_r-1}^2 & \dots & y_{k_r-1}^{N-1} \\
 & & \dots\dots\dots & & \\
1 & x_l & x_l^2 & \dots & x_l^{N-1} \\
1 & x_l+h & (x_l+h)^2 & \dots & (x_l+h)^{N-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & x_l+(k_l-1)h & (x_l+(k_l-1)h)^2 & \dots & (x_l+(k_l-1)h)^{N-1} \\
 & & \dots\dots\dots & &
\end{vmatrix}
$$

$(i=1, 2, \dots, r-1;\ l=r+1, r+2, \dots, n)$

Tekintettel arra, hogy B_{rj} identikus átalakitásával elérhető, hogy az x_i-t tartalmazó sorkomplexus (j_i+1)-edik sorának (m_i+1)-edik eleme

$$
b^{(i)}_{j_i m_i} = (x_i+j_i h)^{m_i} - \binom{j_i}{1}(x_i+(j_i-1)h)^{m_i} + \\
+ \binom{j_i}{2}(x_i+(j_i-2)h) - \dots + (-1)^{j_i} x_i^{m_i}
$$

legyen, és arra, hogy

$$
\left(\frac{b^{(i)}_{j_i m_i}}{h^{j_i}}\right)_{h=0} = \frac{d^{j_i}(x^{m_i})}{dx_i^{j_i}} = j_i!\binom{m_i}{j_i} x_i^{m_i-j_i}
$$

belátható, mivel ugyanez az x_l-t tartalmazó sorkomplexusra is áll, hogy

$$A'_{rj} = \left(\frac{B_{rj}}{h^{\sum\limits_{i=1}^{r-1} \frac{k_i(k_i-1)}{2} + \sum\limits_{l=r+1}^{n} \frac{k_l(k_l-1)}{2}}} \right)_{h=0} \tag{7}$$

B_{rj} pedig egyszerűen kiszámítható, minthogy egy közönséges VANDERMONDE-féle determináns:

$$B_{rj} = \prod_{w=1}^{n}{}^{(r)} (k_w-1)!\,(k_w-2)!\dots 3!\,2!\,.$$

$$(x_w-x)(x_w+h-x)(x_w+2h-x)\dots(x_w+(k_w-1)h-x)$$

$$\prod_{i_w=w+1}^{n}{}^{(r)} \prod_{j_w=0}^{k_w-1} (x_{i_w}-(x_w+j_wh))\,(x_{i_w}+h-(x_w+j_wh))\dots$$

$$\dots (x_{i_w}+(k_w-1)h-(x_w+j_wh)).$$

$$\Delta(y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{k_r-1}).$$

$$(-1)^{(k_r-1)(k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+1)} \prod_{u=0}^{k_r-1}{}^{(j)} (x-y_u) \prod_{v=1}^{n}{}^{(r)} \prod_{j_v=0}^{k_v-1} (x_v+j_vh-y_u)^{*}$$

B_{rj}-ben h kitevője épen

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{k_i(k_i-1)}{2} + \sum_{l=r+1}^{n} \frac{k_l(k_l-1)}{2}$$

úgy, hogy

$$A'_{rj} = (-1)^{(k_r-1)(k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+1)}$$

$$\prod_{w=1}^{n}{}^{(r)} (k_w-1)!\,(k_w-2)!\dots 3!\,2!\,(x_w-x)^{k_w}$$

$$\prod_{\substack{t>s \\ t,\,s=1,2,\dots,n}}{}^{(r)} (x_t-x_s)^{k_tk_s}\,\Delta(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, y_m).$$

$$\prod_{u=0}^{m}{}^{(j)} (x-y_u)\,(x_1-y_u)^{k_1}\,(x_2-y_u)^{k_2}\dots$$

$$\dots (x_{r-1}-y_u)^{k_{r-1}}\,(x_{r+1}-y_u)^{k_{r+1}}\dots(x_n-y_u)^{k_n}.$$

---

* $\prod\limits_{w=1}^{n}{}^{(r)} = \prod\limits_{w=1,2,\dots,r-1,r+1,\dots,n}$; $\Pi^{(j)}$-nek analóg a jelentése; $\Delta(y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m)$ az y-oknak VANDERMONDE-féle determinánsa.

Bevezetjük a következő jelölést:

$$(x-y)(x_1-y)^{k_1}(x_2-y)^{k_2}\dots$$
$$\dots(x_{r-1}-y)^{k_{r-1}}(x_{r+1}-y)^{k_{r+1}}(x_n-y)^{k_n}=\varphi_r(y).$$

E szerint:

$$(-1)^{(k_r-1)(k_1+k_2+\dots+k_r+1)}A'_{rj}=$$
$$=\prod_{w=1}^{n}{}^{(r)}(k_w-1)!\,(k_w-2)!\dots 3!\,2!\left(\frac{\varphi_r(y)}{x-y}\right)_{y=x} \qquad 8)$$
$$\prod_{\substack{t>s\\ t,s=1,2,\dots,n}}{}^{(r)}(x_t-x_s)^{k_tk_s}\varphi_r(y_0)\varphi_r(y_1)\dots\varphi_r(y_{j-1})\varphi_r(y_{j+1})\dots\varphi_r(y_m)$$

vagy röviden

$$A'_{rj}=M\varDelta\psi_0\psi_1\psi_2\dots\psi_{j-1}\psi_{j+1}\dots\psi_m \qquad 8^*)$$

a hol M A'_{rj}-nek az y-októl független része, míg

és

$$\varDelta=\varDelta(y_0,y_1,y_2,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_m)$$
$$\psi_u=\varphi_r(y_u) \qquad (u=0,1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,m)$$

Hogy A'_{rj}-ből 6) alapján A_{rj}-t magát megkaphassuk, végre kell hajtanunk a

$$C_{rj}=\varDelta\,\psi_1\psi_2\dots\psi_{j-1}\psi_{j+1}\dots\psi_m$$

kifejezésen a szükséges differencziálásokat, tekintettel arra, hogy ψ_u csak y_u-tól függ, a többi y-tól azonban független; legyen rövidség kedvéért:

és

$$\psi_u^{(\mu)}=\frac{d^\mu\psi_u}{dy_u^\mu}$$

$$\varDelta_{i_1i_2\dots i_{j-1}i_{j+1}\dots i_m}=\frac{d^{i_1+i_2+\dots+i_{j-1}+i_{j+1}+\dots+i_m}}{dy_1^{i_1}dy_2^{i_2}\dots dy_{j-1}^{i_{j-1}}dy_{j+1}^{i_{j+1}}\dots dy_m^{i_m}}\varDelta$$

C_{rj}-t differencziálnunk kell:

egyszer	$y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_m$	szerint	(1)
«	$y_2, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_m$	«	(2)
	s í. t.		
egyszer	$y_{j-1}, y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_m$	«	$(j-1)$
«	$y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_m$	«	$(j+1)$
még egyszer	$y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_m$	«	$(j+1)'$
«	$y_{j+2}, \ldots, y_m$	«	$(j+2)$
	s í. t.		
egyszer	y_m	«	(m)

Az (1), (2), ... (m) differencziálásokat egy és ugyanazon képlet szerint végezhetjük; ugyanis mindig oly kifejezéseket kell m' változó mindegyike szerint egyszer differenciálnunk, a melyek $m'+1$ oly tényező szorzatára bonthatók, a melyek közül egyik mind *az* m' változónak függvénye a többi m' tényező pedig egy-egy változótól függ.

Az általános képlet, a mely szerint e differencziálásokat történhetnek, a mint közvetlenül belátható, a következő:

$$C_{rj}^{(r)} = \frac{d^{m-1} C_{rj}}{dy_1\, dy_2 \ldots dy_{j-1} dy_{j+1} \ldots dy_m} =$$

$$= \Delta \psi'_1 \psi'_2 \ldots \psi'_{j-1} \psi'_{j+1} \ldots \psi'_m + \frac{\partial \Delta}{\partial y_1} \psi_1 \psi'_2 \ldots \psi'_{j-1} \psi'_{j+1} \ldots \psi'_m +$$

$$+ \frac{\partial \Delta}{dy_2} \psi'_1 \psi_2 \psi'_3 \ldots \psi'_m + \cdots + \frac{\partial^2 \Delta}{dy_1 dy_2} \psi_1 \psi_2 \psi'_3 \ldots \psi'_{j-1} \psi'_{j+1} \ldots y'_m +$$

$$+ \frac{\partial^2 \Delta}{dy_1 dy_3} \psi_1 \psi'_2 \psi_3 \psi'_4 \ldots \psi'_m + \cdots +$$

$$+ \frac{\partial^u}{dy_1 dy_2 \ldots dy_u} \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_u \psi'_{u+1} \ldots \psi'_{j-1} \psi'_{j+1} \ldots \psi'_m + \cdots +$$

$$+ \frac{\partial^{m-1} \Delta}{dy_1 dy_2 \ldots dy_{j-1} dy_{j-2} \ldots dy_m} \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_{j-1} \psi_{j+1} \ldots \psi_m$$

vagy összegezési jelet használva:

$$C_{rj}^{(1)} = \sum_{(i_{11}, i_{12}, \ldots, i_{1j-1}, i_{1j+1}, \ldots, i_{1m} = 0, 1)} \Delta i_{11} i_{12} \ldots i_{1j-1} i_{1j+1} \ldots$$

$$\ldots i_{1m} \psi_1^{(1-i_{11})} \psi_2^{(1-i_{12})} \ldots \psi_{j-1}^{(1-i_{1j-1})} \psi_{j+1}^{(1-i_{1j+1})} \ldots \psi_m^{(1-i_{1m})}$$

A (2), (3), ..., $(j-1)$, $(j+1)$, $(j+1)'$, ..., (m) alatti differencziálásokat ugyane képlet szerint ennek az összegnek minden egyes tagján elvégezhetjük, s azt kapjuk, hogy minde differencziálások elvégzése után C_{rj}-ből lesz:

$$C_{rj}^{(m)} = \sum_{\left(\begin{array}{l} i_{11}, i_{12}, \dots, i_{1\,j-1}, \; i_{1\,j+1}, \; i_{1\,j+2}, \; \dots, i_{1m}, \\ \quad i_{22}, \dots, i_{2\,j-1}, \; i_{3\,j+1}, \; i_{2\,j+2}, \; \dots, i_{2m}, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad i_{j-1\,j-1}, i_{j-1\,j+1}, i_{j-1\,j+2}, \dots, i_{j-1\,m}, \\ \qquad\quad i_{j+1\,j+1}, i_{j+1\,j+2}, \dots, i_{j+1\,m}, \\ \qquad\quad i'_{j+1\,j+1}, i'_{j+1\,j+2}, \dots, i'_{j+1\,m}, \\ \qquad\qquad i_{j+2\,j+2}, \dots, i_{j+2\,m}, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad i_{mm}=0,1 \end{array}\right)}$$

$$\Delta i_{11},\, i_{12}+i_{22}, \dots, i_{1\,j-1}+i_{2\,j-1}+\dots+i_{j-1\,j-1},\, i_{1\,j+1}+i_{2\,j+1}+\dots+$$
$$+i_{j-1\,j+1}+i_{j+1\,j+1}+i'_{j+1\,j+1},\, i_{1\,j+2}+\dots+i_{j-1\,j+2}+i'_{j+1\,j+2}+$$
$$+i_{j+2\,j+2}, \dots, i_{1m}+i_{2m}+\dots+i_{j-1\,m}+i_{j+1\,m}+$$
$$+i'_{j+1\,m}+\dots+i_{mm}$$

$$\varphi_1^{(1-i_{11})}\,\varphi_2^{(2-(i_{11}+i_{12}))}\dots$$
$$\dots\varphi_{j-1}^{(j-1-(i_{1\,j-1}+\dots+i_{j-1\,j-1}))}\,\varphi_{j+1}^{(j+1-(i_{1\,j+1}+\dots+i_{j-1\,j+1}+i_{j+2\,j+1}+i'_{j+1\,j+1}))}$$
$$\varphi_{j+2}^{(j+2-(i_{1\,j+2}+\dots+i_{j-1\,j+2}+i_{j+1\,j+2}+i'_{j+1\,j+2}+i_{j+1\,j+2}))}$$
$$\varphi^{(m-(i_{1m}+\dots+i_{j-1\,m}+i_{j+1\,m}+i'_{j+1\,m}+i_{j+2m}+\dots+i_{mm}))}$$

összevonva az egyenlő tagokat, könnyen belátható, hogy a következő kifejezéshez jutunk:

$$C_{rj}^{(m)} \sum_{i_1=0}^{1}\,\sum_{i_1=0}^{2}\dots\sum_{i_{j-1}=0}^{j-1}\,\sum_{i_{j+1}=0}^{j+1}\,\sum_{i_{j+2}=0}^{1+2}\dots$$
$$\dots\sum_{i_m=0}^{m}\binom{1}{i_1}\binom{2}{i_2}\dots\binom{j-1}{i_{j-1}}\binom{j+1}{i_{j+1}}\binom{j+2}{i_{j+2}}\dots\binom{m}{i_m}$$
$$\Delta i_1 i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} i_{j+2} \dots i_m\, \varphi_1^{(1-i_1)}\,\varphi_2^{(2-i_2)}\dots$$
$$\dots\varphi_{j-1}^{(j-1-i_{j-1})}\,\varphi_{j+1}^{(j+1-i_{j+1})}\,\varphi_{j+2}^{(j+2-i_{j+2})}\dots\varphi_m^{(m-i_m)}.$$

Most már tehetünk $C_{rj}^{(m)}$-ben az összes y-ok helyébe y_r-t, hogy a 6) és 7) alapján A_{rj}-t megkaphassuk. $C_{rj}^{(m)}$ összes tagjai közül az

$$y_0=y_1=\dots=y_{j-1}=y_{j+1}=\dots=y_m=x_r \tag{10)}$$

helyettesités után egyetlen egy lesz a zérustól különböző; ha ugyanis $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_m}$-ben két i egymással egyenlő, vagy valamely $i=0$, akkor

$$(\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_m})_{\substack{y_u = x_r \\ (u=0,1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,m)}} = 0$$

Ez közvetlenül világos, ha a differencziálásokat Δ-nak determináns alakján végezzük, a melyben minden sor elemei csak egy y-t tartalmaznak s ugyanaz az y két különböző sorban nem fordul elő. A zérustól különböző tagot $C_{rj}^{(m)}$ ama tagja szolgáltatja, a melyben Δ-nak következő differencziálhányadosa fordul elő:

$$\bar{\Delta} = \Delta_{1,2,3,\dots,j-1,j,j+1,\dots,m-1} =$$

$$= \begin{vmatrix}
1 & y_0 & y_0^2 \dots & y_0^{j-1} & y_0^j & y_0^{j+1} \dots & y_0^{m-1} \\
0 & 1! & 2y_1 \dots & (j-1)\, y_1^{j-2} & j\, y_1^{j-1} & (j+1)\, y_1^j \quad \dots & (m-1)\, y_1^{m-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \;\dots\dots & 0 & (j-1)! & (j-1)!\binom{j}{j-1} y_{j-1} & (j-1)!\binom{j+1}{j-1} y_{j-1}^2 \dots & (j-1)!\binom{m-1}{j-1} y_{j-1}^{m-j} \\
0 & 0 \;\dots\dots & 0 & 0 & j! & j!\binom{j+1}{j} y_{j+1} \dots & j!\binom{m-1}{j} y_{j+1}^{m-j-1} \\
0 & 0 \;\dots\dots & 0 & 0 & 0 & (j+1)! \dots & (j+1)!\binom{m-1}{j+1} y_{j+2}^{m-j-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \;\dots\dots & 0 & 0 & 0 & 0 \;\dots\dots & (m-1)!
\end{vmatrix} =$$

$=1!\,2!\,3!\ldots(j-1)!\,(j+1)!\ldots(m-1)!$ a 10) alatti helyettesítés elvégzése után is; Δ-nak többi oly $C_{rj}^{(m)}$-ben előforduló differencziálhányadosai, a melyekben az összes i-k egymástól különbözők csak ennek a Δ'-nak differencziálhányadosai lehetnek az $i_s<s$ $(s=1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,m)$ feltételek folytán, Δ' azonban az y-okat már nem tartalmazza s így összes differencziálhányadosai zérussal egyenlők. $C_{rj}^{(m)}$-ből tehát a 10) alatti helyettesítések után valóban csak egyetlen tag marad meg, még pedig a következő:

$$2!\,3!\ldots(m-1)!\binom{1}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{3}\ldots\binom{j-1}{j-1}\binom{j+1}{j}\binom{j+2}{j+1}\ldots$$

$$\ldots\binom{m}{m-1}[\psi_1\psi_2\ldots\psi_{j-1}\psi'_{j+1}\psi'_{j+2}\ldots\psi'_m]_{y_u=x_r}=$$

$$=2!\,3!\ldots(m-1)!\,m!\,\frac{1}{j!}(\varphi_r(x_r))^{j-1}\left(\frac{d\varphi_r(x_r)}{dx_r}\right)^{m-j}.$$

A 6) és 7) alatti képletek szerint tehát, minthogy $m=k_r-1$

$$A_{rj}=(-1)^{k_r(k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+1)+j}$$

$$\prod_{w=1}^{n}(k_w-1)!\,(k_w-2)!\ldots3!\,2!\,\prod_{\substack{t>s\\(t,s=1,2,\ldots,n)}}^{(r)}(x_t-x_s)^{k_t k_s}$$

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{\varphi_r(y)}{x-y}\right)_{y=x}(\varphi_r(x_r))^j\,(\varphi'_r(x_r))^{k_r-1-j} \qquad 11)$$

$f(x)$ előállításánál $\frac{A_{rj}}{D}$-re van szükségünk; a 3) alatti képlet szerint:

$$D=\prod_{w=1}^{n}(k_w-1)!\,(k_w-2)!\ldots3!\,2!\,\prod_{\substack{t>s\\(t,s=1,2,\ldots,n)}}(x_t-x_s)^{k_t k_s}=$$

$$=(-1)^{k_r(k_1+k_2+\cdots+k_{r-1})}\prod_{w=1}^{n}(k_w-1)!\,(k_w-2)!\ldots3!\,2!$$

$$\prod_{\substack{t>s\\(t,s=1,2,\ldots,n)}}^{(r)}(x_t-x_s)^{k_t k_s}.\left(\frac{\varphi_r(x_r)}{x-x_r}\right)^{k_r}$$

tehát:

$$\frac{A_{rj}}{D}=(-1)^{k_r-j}\left(\frac{\varphi_r(y)}{x-y}\right)_{y=x}\frac{(x-x_r)^j}{j!}\left(\frac{\varphi_r(x_r)}{x-x_r}\right)^{j-k_r}(\varphi'_r(x_r))^{k_r-j-1}$$

vagy a következő jelölést használva:

$$\frac{\varphi_r(y)}{x-y} = \Phi_r(y) = (x_1-y)^{k_1}(x_2-y)^{k_2}\dots$$
$$\dots(x_{r-1}-y)^{k_{r-1}}(x_{r+1}-y)^{k_{r+1}}\dots(x_n-y)^{k_n}$$

a honnan

$$\varphi'_r(x_r) = -\Phi_r(x_r) + (x-x_r)\Phi'(x_r)$$

s ha végre $-\frac{A_{rj}}{D} = a_{rj}$ az 5) képlet alapján azt kapjuk, hogy:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\substack{r=1,2,\dots,n \\ j=0,1,2,\dots,k_r-1}} a_{rj}u_{rj} \\ a_{rj} &= \frac{(x-x_r)^j}{j!}\,\frac{\{\Phi_r(x_r)-(x-x_r)\Phi'_r(x_r)\}^{k_r-j-1}}{\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j}}\,\Phi_r(x) \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I)}$$

a hol

Látható, hogy a_{rj}, a mint A_{rj} determináns alakja előre mutatja, x-ben $k_1+k_2+\dots+k_n-1=N-1$-edfokú.

Ez a képlet a LAGRANGE-féle interpoláczió-képletnek oly általánosítása, a melyből bármely az egész függvények interpolácziójára vonatkozó speczialis képlet azonnal kiadódik, s így megkaphatók mindama képletek is, a melyeket MARKOFF az idézett helyen explicit alakban előállít.

Fontos speczialis eset pl. a következő:

$$k_1=k_2=\dots=k_n=k.$$

Legyen

$$F(x) = \prod_{t=1}^{n}(x_t-x)$$

és

$$F_r(x) = \frac{F(x)}{(x_r-x)}$$

akkor

$$\Phi_r(x) = \{F_r(x)\}^k$$

$$\Phi'_r(x) = k\{F_r(x)\}^{k-1}F'_r(x),$$

tehát

$$a_{rj} = \frac{(x-x_r)^j}{j!}\,\frac{\{F_r(x_r)-k(x-x_r)F'_r(x_r)\}^{k-j-1}}{\{F_r(x_r)\}^{2k-j-1}}\,(F_r(x))^k. \quad \mathrm{I}^*)$$

Ez a képlet $n=1$ esetben megadja a véges TAYLOR-féle sort; ha ugyanis $n=1$

$$F_1(x)=1, \quad F_1(x_r)=1, \quad F_r''(x_r)=0$$

$$a_{1j}=\frac{(x-x_1)^j}{j!}$$

és

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(x-x_1)^j}{j!}f^{(j)}(x_1).$$

Ha pedig n-t hagyjuk meg tetszőlegesnek és $k=1$ a LAGRANGE-féle interpoláczió képletet kapjuk:

Ha ugyanis

$$k=1, \quad j=0$$

és

$$a_{r0}=\frac{F_r(x)}{F_r(x_r)},$$

tehát

$$f(x)=\sum_{r=1}^{n}\frac{F_r(x)}{F_r(x_r)}f(x_r).$$

Legyen végre $k=2$, $n=2$, akkor megkapjuk azt a képletet, a melyet MARKOFF Differenzenrechnungjának 6-dik lapján találunk s a melyet MARKOFF egy csupán

$$k_1=k_2=\cdots=k_l=2, \; k_{l+1}=k_{l+2}=\cdots=k_n=1$$

esetben előnyösen alkalmazható módszer segítségével vezet le.

Az I*) alapján ha $k=2$, $n=2$

$$\left.\begin{aligned} a_{1j}&=\frac{(x-x_1)^j}{j!}((x_2-x_1)+2(x-x_1))^{1-j}\frac{(x_2-x)^2}{(x_2-x_1)^{3-j}} \\ a_{2j}&=\frac{(x-x_2)^j}{j!}((x_1-x_2)+2(x-x_2))^{1-j}\frac{(x_1-x)^2}{(x_1-x_2)^{3-j}} \end{aligned}\right\} \quad j=0,\,1$$

innen

$$f(x)=\frac{(x-x_2)^2}{(x_1-x_2)^3}(3x_1-x_2-2x)f(x_1)+\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2(x-x_1)f'(x_1)+$$

$$+\frac{(x-x_1)^2}{(x_2-x_1)^3}(3x_2-x_1-2x)f(x_2)+\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2(x-x_2)f'(x_2)$$

a mi nem egyéb, mint MARKOFF idézett tétele.

Az I) alatti interpoláczió-képletek a raczionális tört függvények parcziális törtekre bontása problémájának is általános megoldását szolgáltatják; ép úgy megfordítva a parcziális törtekre bontás képleteiből interpoláczió képletek szerkeszthetők: ily úton állítható elő MARKOFF művének 6-dik lapján található interpoláczió képletét $n=2$ és tetszőleges k_1 és k_2-re vonatkozólag; az általánosan ismeretes parcziális törtekre való bontás képleteiben azonban raczionális tört függvényeknek magasabbrendű differencziálhányadosai fordulnak elő, a mi kezelhetőségüket nagy mértékben megnehezíti; az I) alatti képletekben csupán egy raczionális *egész* függvény *első* differencziálhányadosa fordul elő, az I)-ből $n=2$ esetére kiadódó képlet tehát készebb alakban jelenik meg, mint MARKOFF képlete; ugyanez mondható az I)-ből most levezetendő, a parcziális törtekre bontásra vonatkozó képletekről is, az általánosan ismeretes képletekkel szemben.

Legyen

$$R(x)=\frac{f(x)}{\Phi(x)}$$

egy tetszőleges raczionális tört függvény, a melyben a nevezőnek gyöktényezőkre bontott alakja:

$$\Phi(x)=(x_1-x)^{k_1}(x_2-x)^{k_2}\ldots(x_n-x)^{k_n}$$

Mint ismeretes $R(x)$ egy és csak egyféleképen írható a következő u. n. parcziális törtekre bontott alakban:

$$\begin{aligned}R(x)=&\frac{K_{11}}{x_1-x}+\frac{K_{12}}{(x_1-x)^2}+\cdots+\frac{K_{1l}}{(x_2-x)^l}+\cdots+\frac{K_{1k_1}}{(x_2-x)^{k_1}}+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{K_{r1}}{x_r-x}+\frac{K_{r2}}{(x_r-x)^2}+\cdots+\frac{K_{rl}}{(x_r-x)^l}+\cdots+\frac{K_{rk_r}}{(x_r-x)^{k_r}}+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{K_{n1}}{(x_n-x)}+\frac{K_{n2}}{(x_n-x)^2}+\cdots+\frac{K_{nl}}{(x_n-x)^l}+\cdots+\frac{K_{nk_n}}{(x_n-x)^{k_n}}.\end{aligned}$$

Közönségesen a K számbeli együtthatókat a következő alakban szokás előállitani:

$$(-1)^{N-k_r+l} K_{rl} = \frac{1}{l!}\left(\frac{d^l}{dx^l}\frac{f(x)}{\Phi_r(x)}\right)_{x=x_r} \qquad \text{II)}$$

Az I)-ből a K-k számára oly képletet vezethetünk le, a melyben a II)-ben fellépő differencziálások már el vannak végezve s csak egy raczionális egész függvény egyszerű differencziálása marad hátra.

Hogy a K-kat az I)-ből meghatározzuk, elég az

$$f(x) = \sum a_{rj}\, u_{rj}$$

képletbe az a-knak I) alatti értékeit betenni, a kijelölt hatványozásokat elvégezni, $\Phi(x)$-szel mindkét oldalt végig osztani és $(x_r - x)$ egyenlő hatványainak együtthatóit összevonni.

Az I)-ből:

$$a_{rj} = \frac{(x-x_r)^j}{j!}\frac{\Phi_r(x)}{(\Phi_r(x_r))^{k_r-j}}\Bigg(\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j-1} -$$

$$-\binom{k_r-j-1}{1}(x-x_r)\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j-2}\Phi'_r(x_r)+\cdots+$$

$$+(-1)^i\binom{k_r-j-1}{i}(x-x_r)^i\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j-1-i}\{\Phi'_r(x_r)\}^i+\cdots+$$

$$+(-1)^{k_r-j-1}(x-x_r)^{k_r-j-1}\{\Phi'_r(x_r)\}^{k_r-j-1}\Bigg) = \frac{(x-x_r)^j}{j!}\Phi_r(x).$$

$$\Bigg(\frac{1}{\Phi_r(x_r)} - \binom{k_r-j-1}{1}(x-x_r)\frac{\Phi'_r(x_r)}{\{\Phi_r(x_r)\}^2}+\cdots+$$

$$+(-1)^i\binom{k_r-j-1}{i}(x-x_r)^i\frac{\{\Phi'_r(x_r)\}^i}{\{\Phi_r(x_r)\}^{i+1}}+\cdots+$$

$$+(-1)^{k_r-j-1}(x-x_r)^{k_r-j-1}\frac{\{\Phi'_r(x_r)\}^{k_r-j-1}}{\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j}}\Bigg)$$

$$\frac{f(x)}{\Phi(x)} = \sum_{\substack{r=1,2,\ldots,n\\ j=0,1,2,\ldots,k_r-1}} \frac{a_{rj}}{\Phi_r(x_r)(x_r-x)^{k_r}}\, u_{rj} =$$

$$= \sum_{r,j}\frac{(-1)^j}{j!}\Bigg(\frac{1}{\Phi_r(x_r)(x_r-x)^{k_r-j}} + \frac{\binom{k_r-j-1}{1}\Phi'_r(x_r)}{\{\Phi_r(x_r)\}^2(x_r-x)^{k_r-j-1}}+\cdots+$$

$$+\frac{\binom{k_r-j-1}{i}\{\Phi'_r(x_r)\}^i}{\{\Phi_r(x_r)\}^{i+1}(x_r-x)^{k_r-j-1}}+\cdots+\frac{\{\Phi'_r(x_r)\}^{k_r-j-1}}{\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j}(x_r-x)}\Bigg)u_{rj}$$

$(x_r-x)^{-l}$ együtthatója e kifejezésben K_{rl}; K_{rl}-t tehát megkapjuk, ha ama tagokat összeadjuk, a melyekben $k_r-j-i=l$ s azután $(x_r-x)^l$-lel végig szorzunk; a legutóbb felírt kifejezés általános tagját kell tehát összegeznünk i szerint 0-tól k_r-l-ig és j helyébe k_r-l-i-t írunk és $(x_r-x)^l$-szel szoroznunk:

$$K_{rl}=\sum_{i=0}^{k_r-l}\frac{(-1)^{k_r-l-i}}{(k_r-l-i)!}\binom{i+l-1}{l-1}\frac{\{\Phi'_r(x_r)\}^i}{\{\Phi_r(x_r)\}^{i+1}}u_{rk_r-l-i} \qquad \text{II*)}$$

minthogy

$$k_r-j-1=i+l-1$$

és

$$\binom{i+l-1}{i}=\binom{i+l-1}{l-1}$$

A II*)-ből szintén megkaphatók a parcziális törtekre való bontás ismeretes speciális képletei; így pl. ha $k_1=k_2=\cdots=k_n=1$ megkapjuk az oly raczionális kifejezések parcziális törtekre való bontását, a melyek nevezőinek csak egyszeres gyöktényezői vannak, a mely képlet a LAGRANGE-féle interpoláczió-képletből is közvetlenül kiadódik; a képlet a következő: $l=1$, $i=0$

$$K_{r1}=\frac{u_{r0}}{F_r(x_r)}$$

és

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\sum_{r=1}^{n}\frac{f(x_r)}{F'(x_r)}\frac{1}{(x-x_r)}.$$

Ha pedig $n=1$ és k tetszőleges egy a véges TAYLOR-féle sorból közvetlenül kiadódó képlethez jutunk; ez esetben ugyanis $\Phi(x)=(x_r-x)^{k_r}$

$$\Phi_r(x)=1$$

$$\Phi'_r(x)=0,$$

tehát a II*) jobb oldalán álló összeg minden tagja 0, egynek kivételével, a melyben $i=0$; 0^0-t 1-nek véve azt kapjuk, hogy

$$K_{1l}=\frac{(-1)^{k-l}}{(k-l)!}u_{1k-l}$$

s innen

$$\frac{f(x)}{(x_1-x)^k}=\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\frac{f^{(k-l)}(x_1)}{(k-l)!\,(x_1-x)^l}.$$

Zemplén Győző.

NÉHÁNY TÉTEL A HATVÁNYSORRÓL.

A következőkben néhány igen egyszerű tételt adunk, a mely egyes hatványsortipusok összetartási sugarának megállapításánál sikerrel alkalmazható.

I. *Legyen adva az*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n^\lambda} \tag{1}$$

hatványsor, hol λ pozitiv egész szám, továbbá jelentsen $f(x)$ legfeljebb $(\lambda - 1)$-ednemű, de különben tetszőleges transzczendens egész függvényt. Akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f(n) x^{n^\lambda} \tag{2}$$

hatványsor összetartási sugara ***nem lehet kisebb*** *az $F(x)$ hatványsor összetartási sugaránál.*

Legyen ugyanis x az $F(x)$-nek összetartási körében tetszőleges hely; akkor nemcsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |x|^{n^\lambda}$$

összetartó, hanem a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |\varepsilon x|^{n^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, \varepsilon^{n^\lambda} |x|^{n^\lambda}$$

sor is ilyen, hol ε az egységnél nagyobb, de az egységhez elég közel választott, pozitiv szám. Ámde $f(x)$ legfeljebb $(\lambda - 1)$-ednemű egész függvény, és így Poincaré tétele értelmében: *

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{e^{H|x|^\lambda}} = 0,$$

* L. Kürschák József: «Az egyértékű egész függvények neméről» Math. Phys. Lap. V. évfolyam.

hol x tetszőleges úton közeledik a ∞-hez és H tetszőleges pozitiv szám. Esetünkben H helyébe:

$$H = (\log. \varepsilon)$$

tehető, mert $\varepsilon > 1$, és akkor:

$$\lim_{x=\infty} . \frac{f(x)}{e^{(\log. \varepsilon)\,|x|^{\lambda}}} = \lim_{x=\infty} . \frac{f(x)}{\varepsilon^{|x|^{\lambda}}} = 0.$$

Tehát, ha $n > \nu$, (hol ν alkalmasan választandó pozitiv egész szám), akkor

$$\left| \frac{f(n)}{\varepsilon^{n^{\lambda}}} \right| < 1 \qquad (n > \nu),$$

azaz

$$|f(n)| < \varepsilon^{n^{\lambda}} \qquad (n > \nu).$$

Ebből már következik, hogy a (2) alatti sor valóban mindig összetartó, valahányszor x az (1) alatti hatványsor összetartási körébe esik.

A tételből következik:

Ha (1) *transzczendens egész függvény, akkor* (2) *is az.*

II. Tegyünk $f(x)$-re nézve egy egyszerű megszorítást.

Legyen $|f(x)| > g$ *ha* x *pozitiv és nagyobb mint* h, hol g, h tetszőleges pozitiv állandók. *E követelés mellett* — mely a szóban forgó transcendens egész függvények nagy osztályánál ki van elégítve — *az* (1) *és* (2) *alatti hatványsorok összetartási sugara egyenlő.*

Legyen ugyanis x egy tetszőleges hely az $F(x)$ sor összetartási körén kívül; akkor nemcsak

$$\sum |a_n|\, |x|^{n^{\lambda}}$$

széttartó, hanem a

$$\sum |a_n|\, \eta^{n^{\lambda}}\, |x|^{n^{\lambda}}$$

sor is ilyen, hol η az egységnél kisebb pozitiv szám.

De minthogy

$$\lim_{n=\infty} . \eta^{n^{\lambda}} = 0,$$

azért az $f(x)$-re nézve tett megszorítás mellett az n eléggé nagy értékeinél

$$|f(n)| > \eta^{n^\lambda}.$$

Ennélfogva

$$\sum |a_n| \, |f(n)| \, |x|^{n^\lambda}$$

is széttartó. A hatványsor ismeretes tulajdonságainál fogva tehát a (2) alatti sor összetartási köre nem is lehet nagyobb az (1) alattiénál.

Ha $\lambda = 1$, a tételt így fejezhetjük ki:

II. A) *A*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f(n) x^n$$

hatványsorok összetartási sugara egyenlő, ha $f(x)$ a mondott megszorításnak alávetett 0-*odnemű transzczendens egész függvény.*

E tétel ismételt alkalmazásával könnyen jutunk a következőre:

A

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R(f(n)) x^n$$

hatványsorok összetartási köre egyenlő, hol R tetszőleges raczionális függvény (melynek azonban az $f(n)$ értékektől különböző polusai vannak) *és $f(x)$ megint a mondott megszorításnak alávetett egész függvény.*

E tételek sok — a függvénytanban fellépő — hatványsor konvergenczia-sugarának meghatározására alkalmasak. Itt csak két egyszerű alkalmazást említünk:

Ha a II. *A)* alatti tételben:

$$f(x) \equiv x,$$

akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

geometriai haladványból kiindulva a

$$\sum_{n=0}^{\infty} R(n) x^n$$

hatványsorok konvergenczia-sugarát 1-gyel egyenlőnek találjuk.

Vagy ha

$$f(x) \equiv x(x-1)\ldots(x-k+1),$$

akkor a II. első tételének alkalmazása a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

tetszőleges hatványsorra az ismeretes elemi tételt adja: A hatványsorból k-szoros differencziálással levezetett hatványsor konvergenczia-sugara az eredetiével egyenlő.

III. *Ha $f(x)$ tetszőleges végesnemű transzczendens egész függvény, akkor a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f(n) x^{c^n} \tag{3}$$

hatványsor összetartási sugara nem lehet kisebb a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{c^n} \tag{4}$$

hatványsor összetartási sugaránál, hol c az egynél nagyobb pozitiv egész szám.

Mert ha ismét x a (4) összetartási körében fekszik, akkor nemcsak:

$$\sum |a_n| \, |x|^{c^n},$$

hanem

$$\sum |a_n| \, \varepsilon^{c^n} |x|^{c^n}$$

is összetartó, hol ε pozitiv és >1, de az egységhez eléggé közel van választva.

De ha $f(x)$ $(\mu-1)$-ednemű, akkor Poincaré tételének alkalmazásával:

$$|f(n)| < \varepsilon^{n^{\mu}} \qquad (n > \nu).$$

De ha n elég nagy, akkor bizonyára:

$$n^\mu < c^n,$$

tehát

$$\varepsilon^{n^\mu} < \varepsilon^{c^n},$$

és így

$$|f(n)| < \varepsilon^{c^n}.$$

Ebből — úgy mint előbb — következik, hogy a (3) alatti sor convergentia-sugara nem kisebb a (4) alattiénál. Sőt:

IV. *Ha megint* $|f(x)| > g$, *valahányszor* x *pozitiv és* $> h$, *akkor a szóban forgó sorok összetartási sugara egyenlő.*

Alkalmazás: Legyen $f(x)$ a fenti megszorításnak alávetett tetszőleges végesnemű transzczendens egész függvény, mely azonban positiv, ha x pozitiv; akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^{c^n}$$

hatványsor az egységkörön belül összetartó és a tőle definiált monogen analitikai függvényt *teljesen* ábrázolja, vagy röviden: *az egységkör a* $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^{c^n}$ *hatványsortipusra nézve u. n. valódi természetes határvonal.*

Ez kitűnik Lerch* következő tételéből:

Ha

$$m_0, m_1, m_2, \ldots$$

a pozitiv egész számok olyan sorozata, melyben minden tag valamennyi utána következőnek osztója, ha továbbá a

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

komplex számok valós részei rendre oly

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

pozitiv számok, hogy

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu$$

széttartó és ha végre a

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{m_\nu}$$

---

* Acta Mathematica 10. köt. «Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler».

hatványsor az egységkörön belül összetartó: akkor az egységkör a $\mathfrak{P}(x)$ hatványsor segítségével definiált monogén analitikai függvényre nézve valódi természetes határvonal.

Nyilvánvaló, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, x^{c^n}$$

sor mindeme követeléseknek eleget tesz.

Fehér Lipót.

Kimutatás

az 1900 okt. 1-től decz. 15-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek :

1895. évre : Bujk Béla ... ... 6 kor.

1896. évre : Bonis Károly 6 k, Felix János 6 k, Fogarassi Béla 6 k, Hassák Vidor 6 k, Klatt Virgil 6 k, Széchy Ákos 6 k, Szerényi Géza 10 k. Összesen ... ... 46 kor.

1897. évre : Bartha Zsigmond 6 kor., Dobay Sándor 6 k, Dohnányi Frigyes 6 k, Molnár Aladár 6 k, Nuricsán József dr. 10 k, Perger József 6 k, Tatár Balázs 6 k. Összesen ... ... 46 kor.

1898. évre : Angheben Albin 6 k, Bein Károly 10 k, Erdődy Imre 10 k, Kemény X. Ferencz dr. 10 k, Konkoly Thege Miklós id. 10 k, Kovács János dr. 10 k, Mialovich Mór 10 k, Nesnera Aladár 6 k, Pfeiffer Péter dr. 6 k, Schmidt János dr. 2 k, Simon Ferencz 6 k. Összesen ... ... 86 kor.

1899. évre : Balog Mór 10 k, Benkó Imre 6 k, Bogyó Samu 10 k, K. Danch Ferencz 6 k, Dietz E. Lajos 6 k, Fabinyi Rezső dr. 6 k, Gidófalvy Géza 6 k, Hajnal Márton 10 k, Hubatsek Alajos 10 k, Kiss E. János 10 k, Korbuly Emil 6 k, Kúthy József dr. 6 k, Medveczky István 6 k, Muraközy Károly 10 k, Németh Antal dr. 6 k. Pap Lajos 6 k. Perjessy László 6 k, Ratkovszky Pál 6 k. Schmidt János dr. 2 k. Steécz György dr. 6 k, Szabó Péter dr. 10 k, Szavkay Ede 10 k. Összesen ... ... 160 kor.

1900. évre : Anderkó Aurél dr. 10 k, Berkes Imre 10 k, Bielek Miksa 10 k, Bodola László 6 k, Borossy Dávid 6 k, Csajkás Mihály 6 k, Csehély Adolf 6 k, Csemez József 10 k, Dietz E. Lajos 6 k, Dózsa János 6 k, Dsida Ottó 6 k, Edelmann Sebő dr. 6 k, Ellend József 6 k, Farkas Gyula dr. 6 k. Feichtinger Győző 10 k, Félegyházy Antal 6 k, Ferenczy József 6 k, Gerecz Lajos 6 k, Grexa Loránt 6 k, Groszbauer József 6 k. Guta József 6 k, Halmi János 6 k, Hlatky Miklós 6 k, Hoór Mór dr. 10 k, Homor István 6 k, Horváth József dr. 6 k, Hőgyes Endre dr. 10 k, Iszlay József dr. 10 k, Javorik János 6 k, Kalecsinszky Sándor 10 k, Kerekes Dezső 6 k, Keresztély Lajos 6 k, Kherndl Antal 10 k, Fr. Kiss Károly 10 k, Kiss Tamás 6 k, Klimkó Mihály 6 k, Kont Gyula dr. 10 k, Kosztolányi Árpád 6 k, Kurländer Ignácz 10 k, Lukácsi György 6 k, Lutter János 10 k, Marcsiss János 6 k, Nagy Dezső 10 k, Ondrus Pál 6 k, Oszlaczky Szilárd 10 k, Péch Aladár 6 k, Pecz Samu 10 k, Pék János 6 k, Perényi Kandid 6 k, Plischka Norbert 6 k, Plósz Pál dr. 10 k, Renner János 6 k, Róna Zsigmond 10 k, Rózsa István 6 k, Skopál István 6 k, Stark Lipót 10 k, Steindl Imre 10 k, Steiner Lajos dr. 10 k, Staub Sándor 10 k, Stompf László 6 k, Szakmáry József 6 k, Szavkay Ede 10 k, Szekeres Kálmán dr. 10 k, Szemethy Béla 8 k, Szentmiklóssy Jenő 6 k, Szily Kálmán id. 10 k, Szontágh Gusztáv 6 k, Tolnay Lajos 10 k, Weber Márton 6 k, Wodeczky József 6 k, Zemplén Győző 10 k, Zorkóczy Samu 6 k. Összesen ... ... 546 kor.

1901. évre: Borossay Dávid 6 k, Goldziher Károly 4 k, Pap János 10 k. Összesen ... ... 20 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1898—1900. évekre a bpesti V. k. áll főreálisk... ... 30 kor.

1899—1900. évekre a bpesti I. k. áll. tanitóképző 20 kor.

1900. évre: az aradi áll. főgymn, főreálisk és az áll. tanitóképző, a bpesti tanárképző gy. főgymn., a pozsonyi főreáliskola, a Magyar Mérnök és Épitész Egylet. Összesen ... ... 60 kor.

1900—1901 évekre a podolini kisgymn. ... ... 20 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból 344 kor. jan 1-től ... ... 1408 kor.
F. és 1901. évi tags. díjakból 566 kor. jan. 1-től ... 1866 kor.
Előfizetési díjakból 130 kor. jan. 1-től ... ... 743 kor.

Budapest, 1900 deczember 15-én

Feichtinger Győző
pénztárnok.